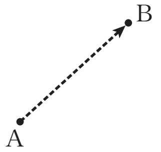
第 1 講　平面上のベクトル

PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等

要点 ①　有向線分とベクトル

長さや質量といった量は，単位を定めることで，5cm や 10kg のように，その単位で測った数値による「大きさ」のみで表される。ここでは，「向き」と「大きさ」で表される量を扱う。

平面上の点 A にあった点が，同じ平面上の点 B まで移動するとき，この移動は，移動の「向き」と「距離」によって定まる。



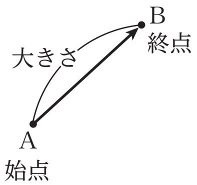
右図の矢印のように，移動の向きをつけた線分を「　　　　」という。有向線分 AB において

　A を「　　」，B を「　　」

という。また，線分 AB の長さを，有向線分の

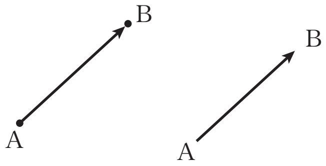
　「　　　」(または「長さ」)

という。

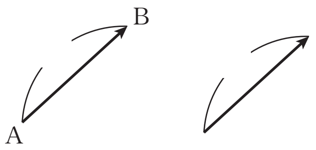


この有向線分を用いて移動を表すとき，その位置を問わず，向きと大きさだけに着目したものを「　　　　」という。

有向線分 AB が表すベクトルを「　　　」と表す。また，ベクトルは 1 つの文字を用いて「　」のように表すこともある。

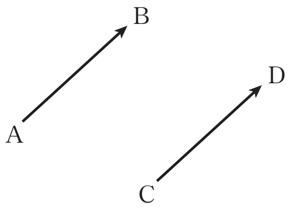


$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ において，有向線分 AB の長さを，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の「　　　」といい，「　　　」と表す。同様に，$\vec{a}$ の大きさを「　　」と表す。



要点 ②　ベクトルの相等，逆ベクトル

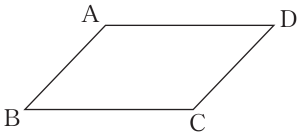
2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の向きが同じで大きさが等しいとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は「　　　」といい，「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$」と表す。2 つのベクトルが等しいときは，これらのベクトルを表す有向線分の一方を平行移動して，他方に重ね合わせることができる。



例　平行四辺形 ABCD において

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$　　　，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$

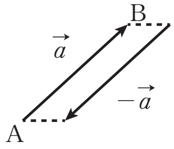
である。



また，ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを，$\vec{a}$ の「　　　　　　」といい，「　　　」と表す。よって，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると，$-\vec{a}=$　　　である。すなわち

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$

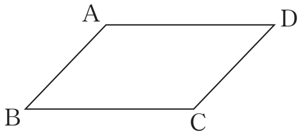
である。



例　平行四辺形 ABCD において

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\quad\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\quad\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

である。



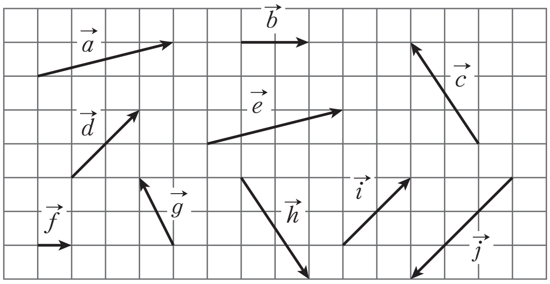
1 右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。

(1) 大きさが等しいベクトル

(2) 向きが同じであるベクトル

(3) 等しいベクトル

(4) 互いに逆ベクトル



Point Pickup

ベクトルの相等と逆ベクトル

2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について

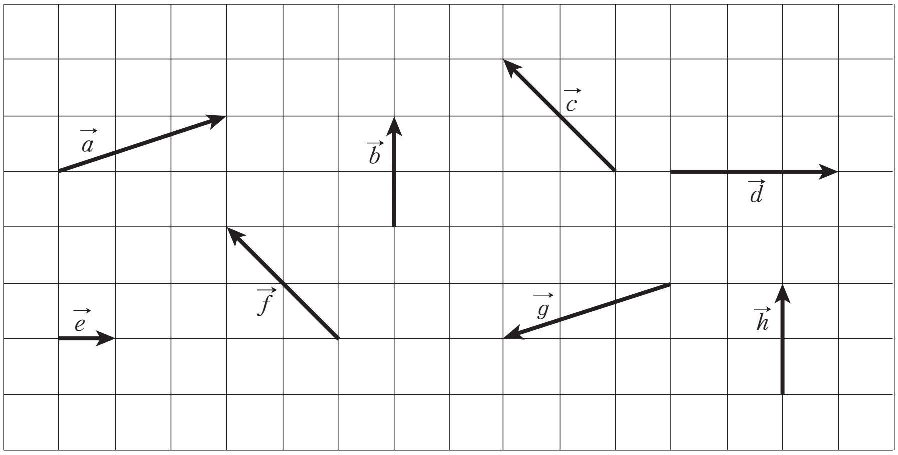
・向きが同じで大きさが等しい $\iff$ $\vec{a}=\vec{b}$ （$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は等しい）

・向きが反対で大きさが等しい $\iff$ $\vec{a}=-\vec{b}$，$\vec{b}=-\vec{a}$

（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに逆ベクトル）

第 1 講　PART1 確認問題

次の図のようなベクトルがある。



1　大きさが等しいベクトルの組は，$\vec{a}$ と ア ，$\vec{b}$ と イ ，$\vec{c}$ と ウ である。

① $\vec{d}$　② $\vec{e}$　③ $\vec{f}$　④ $\vec{g}$　⑤ $\vec{h}$

2　向きが同じであるベクトルの組は，$\vec{b}$ と エ ，$\vec{c}$ と オ ，$\vec{d}$ と カ である。

① $\vec{a}$　② $\vec{e}$　③ $\vec{f}$　④ $\vec{g}$　⑤ $\vec{h}$

3 等しいベクトルの組は，$\vec{b}$ と $\boxed{\text{キ}}$，$\vec{c}$ と $\boxed{\text{ク}}$ である。

① $\vec{d}$　② $\vec{e}$　③ $\vec{f}$　④ $\vec{g}$　⑤ $\vec{h}$

4 互いに逆ベクトルであるベクトルの組は，$\vec{a}$ と $\boxed{\text{ケ}}$ である。

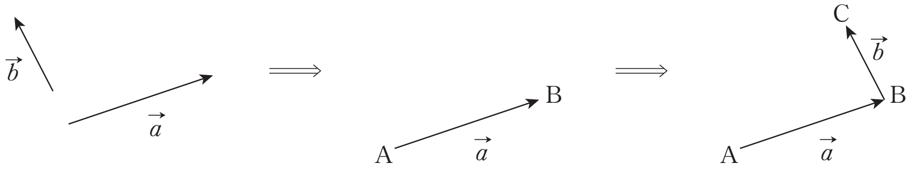
① $\vec{d}$　② $\vec{e}$　③ $\vec{f}$　④ $\vec{g}$　⑤ $\vec{h}$

[MEMO]

PART2 ベクトルの加法・減法

要点 ① ベクトルの加法

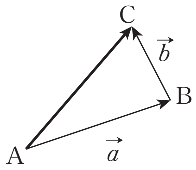
2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して, 1 点 A を定め, 点 A を始点とし $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ となる終点 B をとり, さらに点 B を始点とし $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ となる終点 C をとる。



このとき, $\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「　　」といい,
「$\vec{a}$　$\vec{b}$」と表す。すなわち

$$\overrightarrow{A\quad}+\overrightarrow{\quad C}=\overrightarrow{AC}$$

である。

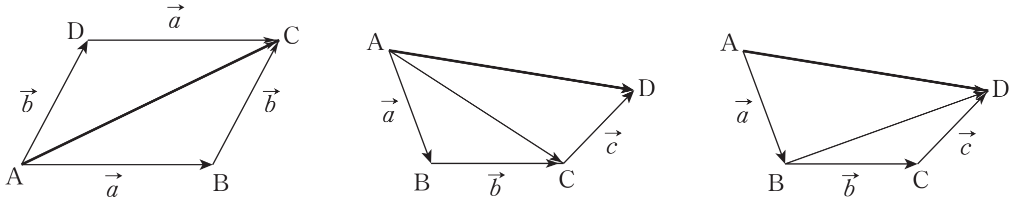


ベクトルの加法について, 次の性質が成り立つ。

ベクトルの加法の性質

交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

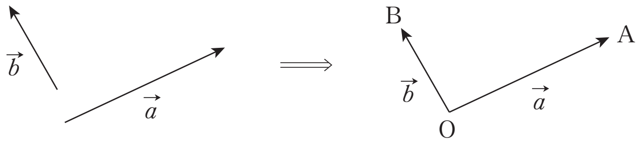


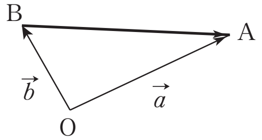
平行四辺形ABCD

結合法則が成り立つことにより, 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の和を単に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く。

要点 ② ベクトルの減法

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して, 1 点 O を定め, 点 O を始点とし $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ となる終点 A, 点 O を始点とし $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となる終点 B をとる。





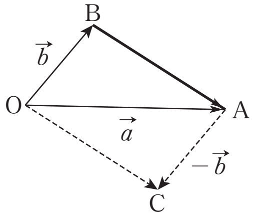
このとき，$\vec{b}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$ である。この $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ を引いた「　」といい，「$\vec{a}$　$\vec{b}$」と表す。すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}-\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}=\overrightarrow{\qquad}$$

である。同様に，$\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}-\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}=\overrightarrow{\qquad}$$

である。



また，右図において

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

であり，四角形 OBAC は平行四辺形であることから

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

である。よって，次の等式が成り立つ。

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

要点 ③ 零ベクトル

始点と終点がともに A であるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は「大きさが　」のベクトルと考えられる。このような，大きさが 0 のベクトルを「　　　　　」(またはゼロベクトル)といい，「　」と表す。零ベクトルの向きは考えない。

零ベクトルについて，次の性質が成り立つ。

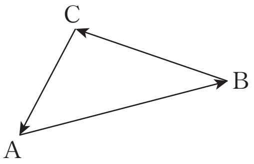
$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0},\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

例　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

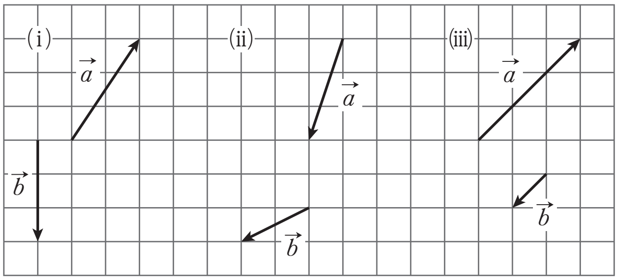
$=\overrightarrow{\qquad}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$

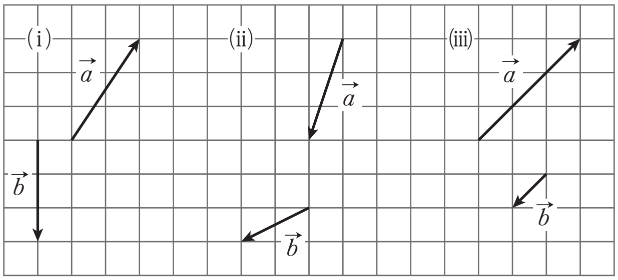
$=$



2 (1) 次の(i)~(iii)のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



(2) 次の(i)~(iii)のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



Point Pickup

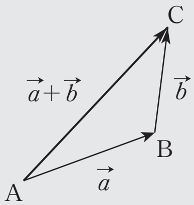
ベクトルの和

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$$

である。

一方のベクトルの終点と，他方のベクトルの始点を重ねる。



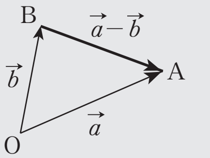
ベクトルの差

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$$

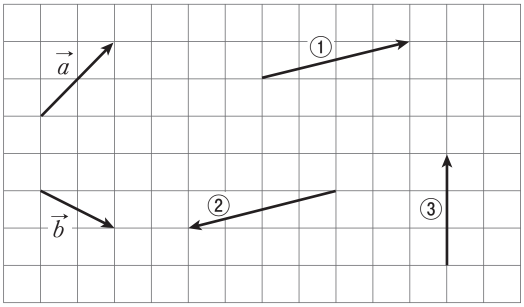
である。

2 つのベクトルの始点を重ねる。

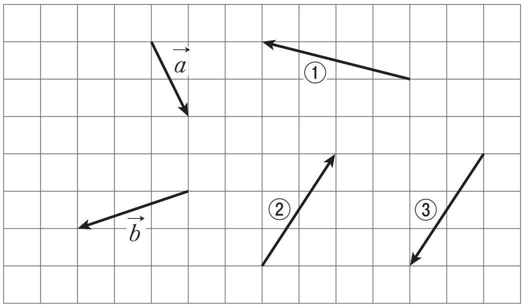


第1講 PART2 確認問題

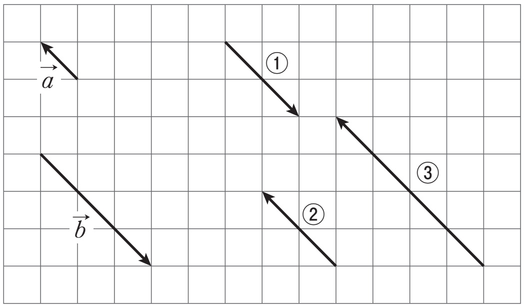
1 次の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 ア



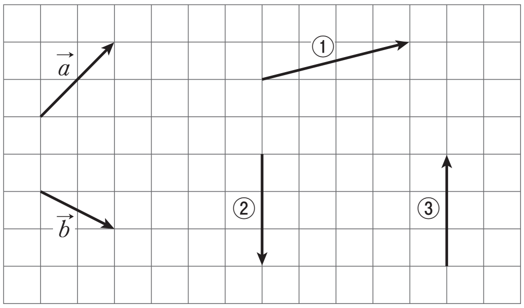
2 次の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 イ



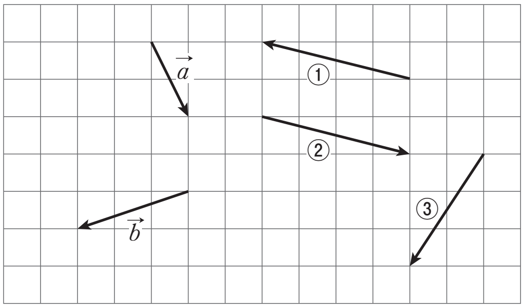
3 次の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 ウ



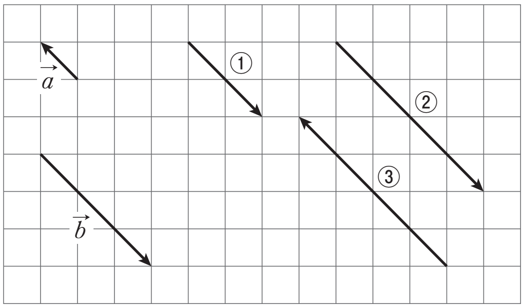
4 次の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 エ



5 次の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 オ



6 次の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 カ



PART3 ベクトルの実数倍，ベクトルの演算

要点 ① ベクトルの実数倍

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，「　　」を次のように定義する。

[1] $k>0$ のとき　　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

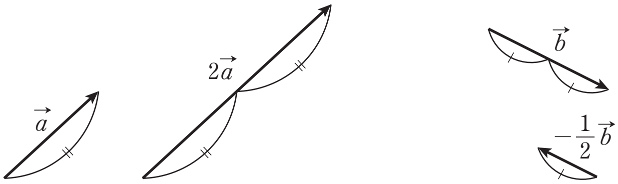
特に　$1\vec{a}=\vec{a}$

[2] $k<0$ のとき　　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

特に　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

[3] $k=0$ のとき　　$k\vec{a}=$

例



$\vec{a}=\vec{0}$ のときは，任意の実数 k に対して

$$k\vec{a}=\vec{0}$$

と定義する。すなわち，任意の実数 k に対して $k\vec{0}=\vec{0}$ である。

※上記の定義により，$(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$ が成り立つから，これらを単に $-k\vec{a}$ と書く。

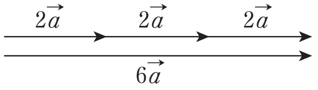
要点 ② ベクトルの実数倍の性質と演算

ベクトルの実数倍について，次の性質が成り立つ。

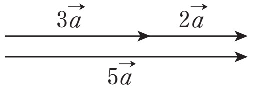
ベクトルの実数倍の性質

k，l を実数とする。

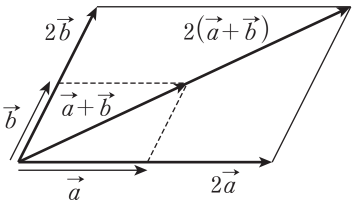
$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$



$3(2\vec{a})=6\vec{a}=(3\cdot 2)\vec{a}$



$3\vec{a}+2\vec{a}=5\vec{a}=(3+2)\vec{a}$



$2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

ベクトルの加法，減法，実数倍の計算においては，これまで学んだ性質により，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を文字 a，b と同じように扱うことができる。

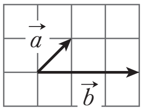
例　$2(\vec{a}+3\vec{b})+5(2\vec{a}-\vec{b})$

$=\ \ \vec{a}+\ \ \vec{b}+\ \ \ \ \vec{a}\ \ \ \ \vec{b}$

$=\ \ \ \ \ \ \ \ \vec{a}+\ \ \ \ \ \ \ \ \vec{b}$

$=12\vec{a}+\vec{b}$

3 (1) 右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。



(i) $2\vec{a}$　　(ii) $-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　(iii) $3\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}$　　(ii) $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}$　　(iii) $3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})$

(3) 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$2\vec{x}+4\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$$

Point Pickup

ベクトルの実数倍

$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ の実数倍 $k\vec{a}$ について

向き	$k>0$ …… $\vec{a}$ と同じ向き	$k<0$ …… $\vec{a}$ と反対向き
大きさ	$k>0$ …… k 倍	$k<0$ …… $\lvert k\rvert=-k$ 倍

$0\vec{a}=\vec{0}$

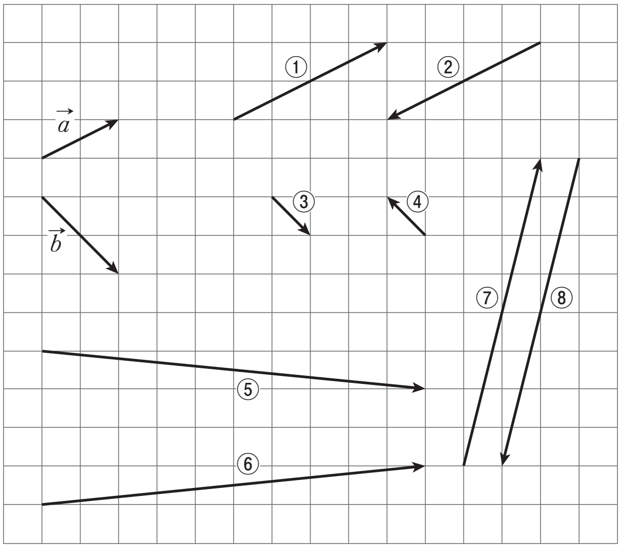
ベクトルの演算

ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。

第 1 講　PART3 確認問題

図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを

それぞれ①～⑧のうちから選べ。



1　$2\vec{a}$ を表すベクトルは ア

2　$-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ を表すベクトルは イ

3　$3\vec{a}+2\vec{b}$ を表すベクトルは ウ

次の計算をせよ。

4 $2\vec{a}+5\vec{a}-3\vec{a}=\boxed{\text{エ}}\vec{a}$

5 $\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{a}-6\vec{b}=\boxed{\text{オ}}\vec{a}-\boxed{\text{カ}}\vec{b}$

6 $4(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+5\vec{b})=\boxed{\text{キ}}\vec{a}+\boxed{\text{ク}}\vec{b}$

次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

7 $4\vec{x}-3\vec{a}=-3\vec{x}-2\vec{b}$

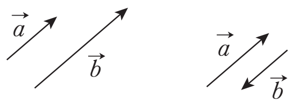
$$\vec{x}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{b}$$

[MEMO]

PART4 ベクトルの平行，ベクトルの分解

要点① ベクトルの平行

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じ，または反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「　　」であるといい，「$\vec{a}$　$\vec{b}$」と書く。

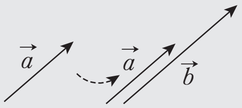


ベクトルの実数倍の定義から，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k が存在する



大きさが1のベクトルを「　　　　　　」という。

例　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　　$\vec{a}$ と　　$\vec{a}$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ である。

要点② ベクトルの分解

一般に，平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

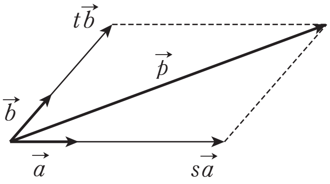
ベクトルの分解

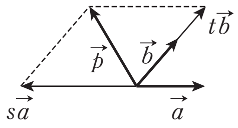
2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形で，ただ1通りに表すことができる。

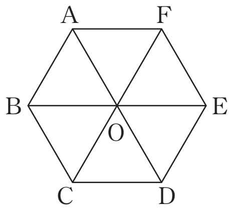




$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「1 次独立」であるという。

4 正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線BEと対角線FCの交点をOとする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{FC}$　　(2) $\overrightarrow{AO}$　　(3) $\overrightarrow{DF}$



Point Pickup

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{p} \iff \vec{p}=k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ が存在する}$$

これにより，与えられたベクトル $\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。

ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立であるとき)，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

の形で，ただ1通りに表すことができる。

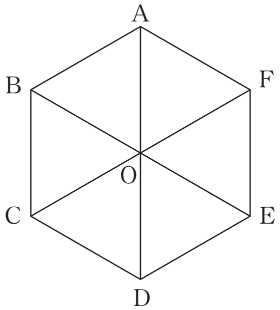
2つのベクトルの和や差を用いて

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

のようにベクトルを「分割」し，$\vec{a}$，$\vec{b}$ または，これらに平行なベクトルで表すことで，s，t を求めることができる。

第1講　PART4 確認問題

正六角形 ABCDEF において，
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線BE
と対角線 FC の交点を O とする。
次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



1　$\overrightarrow{CF}=$ ［ア］

①　$\vec{a}+\vec{b}$　②　$\vec{a}-\vec{b}$　③　$-\vec{a}+\vec{b}$
④　$2\vec{a}$　⑤　$-2\vec{a}$　⑥　$2\vec{a}+2\vec{b}$

2　$\overrightarrow{AD}=$ ［イ］

①　$\vec{a}+\vec{b}$　②　$\vec{a}-\vec{b}$　③　$-\vec{a}+\vec{b}$
④　$2\vec{a}$　⑤　$-2\vec{a}$　⑥　$2\vec{a}+2\vec{b}$

3　$\overrightarrow{CE}=$ ［ウ］

①　$\vec{a}+\vec{b}$　②　$\vec{a}-\vec{b}$　③　$-\vec{a}+\vec{b}$
④　$2\vec{a}$　⑤　$-2\vec{a}$　⑥　$2\vec{a}+2\vec{b}$

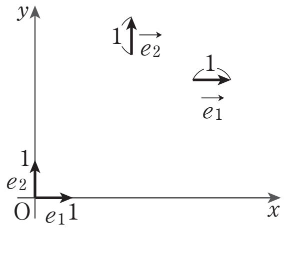
第 2 講　ベクトルの成分表示

PART1 ベクトルの成分

要点 ① 基本ベクトルとベクトルの成分

ここでは，座標平面上でベクトルを考える。

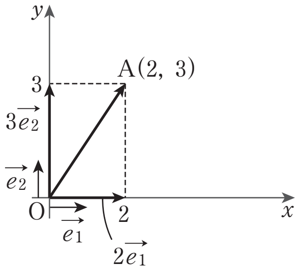
O を原点とする座標平面上において，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを「基本ベクトル」といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ で表す。$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の始点を O とすると，終点の座標はそれぞれ (1，0)，(0，1) である。



座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ である点 A をとったとき，その座標が (2，3) であるならば，$\vec{a}$ は右図より

$$\vec{a}=\quad\vec{e_1}+\quad\vec{e_2}$$

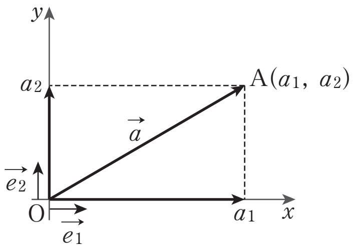
と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いてただ 1 通りに表される。



一般に，座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ である点 A をとったとき，その座標が $(a_1,\ a_2)$ であるならば，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\qquad\vec{e_1}+\qquad\vec{e_2}$$

と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いてただ 1 通りに表される。



この a_1，a_2 を，それぞれ $\vec{a}$ の「　　　」，「　　　」といい，

$$\vec{a}=$$

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の「　　　　」という。

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，および零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる。

$$\vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1),\ \vec{0}=(0,\ 0)$$

要点 ② 成分表示されたベクトルの相等と大きさ

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しいのは，向きが同じで大きさも等しいときである。成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となる点 A，B をとると，A，B はそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ の終点であり，その座標はそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$ である。このとき，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が等しいのは，終点の座標が一致するときである。

したがって，成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，$|\vec{a}|$ は線分 OA の長さであることより，次のことがいえる。

成分表示されたベクトルの大きさ

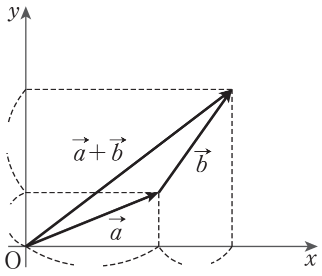
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

要点 ③ 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ は，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\quad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

と表される。よって



$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

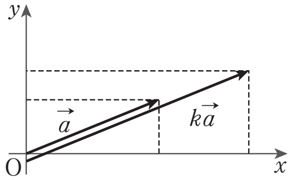
$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}\end{aligned}$$

より，$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$，$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$ と表される。

また，k を実数とするとき

$$k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=(ka_1)\vec{e_1}+(ka_2)\vec{e_2}$$

であるから，$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ である。



以上より，2 つのベクトルの和，差，実数倍を成分で表すと，以下のようになる。

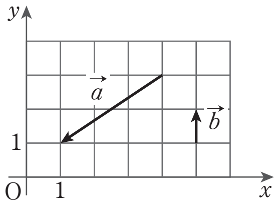
成分表示されたベクトルの演算

$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　(k は実数)

1 (1) 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。



(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(i) $\vec{a}-\vec{b}$ (ii) $2\vec{a}+3\vec{b}$

Point Pickup

ベクトルの成分表示と大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，点 A の座標は $(a_1,\ a_2)$

よって $|\vec{a}|=\mathrm{OA}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

成分表示されたベクトルの演算

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，k を実数とするとき

和 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

差 $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

実数倍 $k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$

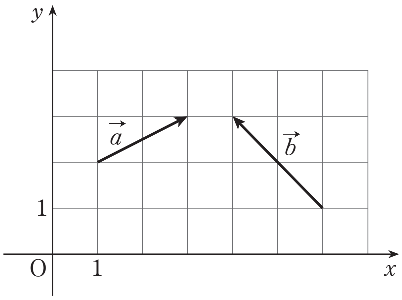
第 2 講　PART1 確認問題

1　次の図のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分と大きさは

$\vec{a}=(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$, $|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$

$\vec{b}=(\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}})$, $|\vec{b}|=\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$

である。



2　$\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -4)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ を成分で表すと

$\vec{a}+\vec{b}=(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}})$

3　$\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -4)$ のとき，$3\vec{a}-\vec{b}$ を成分で表すと

$3\vec{a}-\vec{b}=(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{スセ}})$

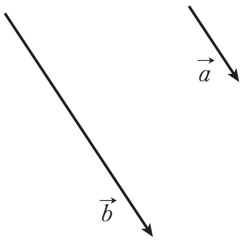
PART2 ベクトルの成分と平行・分解

要点① ベクトルの成分と平行

2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(3,\ x)$ が平行になるように，x の値を定める。

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する



であるから

$=$

$(3,\ x)=(k,\ -2k)$

よって，　，　より $k=3$，$x=-6$

要点② ベクトルの成分と分解

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$

の形で，ただ 1 通りに表すことができる。

これを用いて，$\vec{p}=(8,\ -10)$ を，$\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(5,\ -3)$ を用いて，$s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表す。

$s\vec{a}+t\vec{b}=s(2,\ 4)+t(5,\ -3)=($　　，　　$)$

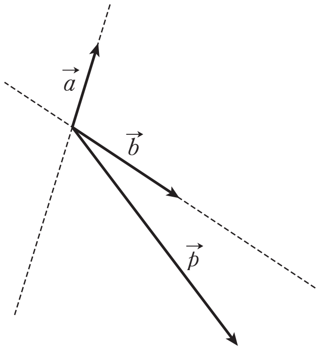
であるから，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると

$(8,\ -10)=(2s+5t,\ 4s-3t)$

よって，

$8=2s+5t$，$-10=4s-3t$ より $s=-1$，$t=2$

したがって $\vec{p}=-\vec{a}+2\vec{b}$



[MEMO]

2 (1) 2 つのベクトル $\vec{a}=(x,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ -4)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

(2) $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-5,\ 6)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

Point Pickup

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$のとき

$\vec{a}\parallel\vec{p} \iff \vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立であるとき)，

任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

の形で，ただ 1 通りに表すことができる。

第 2 講　PART2 確認問題

1　2つのベクトル $\vec{a}=(x,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -9)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

$$x=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

2　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ のとき，$\vec{p}=(4,\ 3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

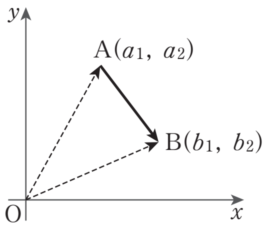
$$\vec{p}=\boxed{\text{エ}}\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\vec{b}$$

PART3 座標と成分表示

要点 ① 2 点の座標とベクトルの成分

座標平面上の 2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ について，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを考える。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\quad,\quad)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\quad,\quad)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}-\overrightarrow{\mathrm{O}\quad}$$

$$=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)$$

$$=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

よって，次のことが成り立つ。

座標と成分表示

2 点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

成分表示されたベクトルにおいて，x 成分は x 軸方向の移動量，y 成分は y 軸方向の移動量をそれぞれ表す。よって，成分表示されたベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の x 成分，y 成分は，点 A から点 B への移動において，x 軸方向，y 軸方向にそれぞれどれだけ移動するかを表している。

[MEMO]

3 座標平面上の3点 A(1, 3)，B(5, 2)，C(7, 4) について，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形になるような点 D の座標を求めよ。

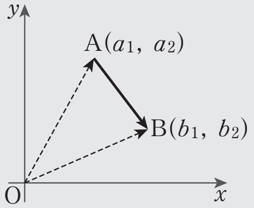
Point Pickup

座標と成分表示

2点 $A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$ について

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$



第2講　PART3 確認問題

座標平面上の3点 A(2, 1)，B(6, 2)，C(8, 5) について，次の問いに答えよ。

1 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(\boxed{ア}, \boxed{イ})$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{ウエ}}$

$\overrightarrow{BC}=(\boxed{オ}, \boxed{カ})$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\boxed{キク}}$

2 四角形 ABCD が平行四辺形になるような点 D の座標を求めよ。

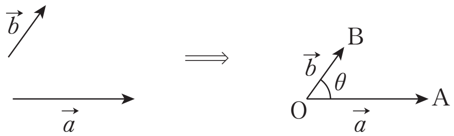
$(\boxed{ケ}, \boxed{コ})$

第 3 講　ベクトルの内積

PART1 ベクトルの内積

要点 ① ベクトルのなす角

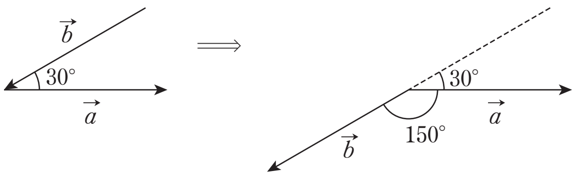
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，点 O を始点として，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ となるような点 A，B をとる。このとき，



$\angle$AOB の大きさ θ を，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「　　　」という。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

例　右の図において $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は

である。



要点 ② ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が θ のとき

「　　　　　　　」

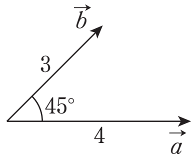
を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「　　」といい，「　　　」で表す。

> **ベクトルの内積**
>
> $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

例　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ=4\times3\times\cos 45^\circ=4\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$$



※内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，ベクトルではなく実数である。また，内積の記号「・」は省略できない。

要点③ ベクトルの垂直と内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ の符号は，$\cos\theta$ の符号と一致するから

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\theta=90^\circ$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\theta=90^\circ$，すなわち2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「　　」であるといい，$\vec{a}$　$\vec{b}$ と書く。よって，次のことが成り立つ。

ベクトルの垂直と内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

※ $\theta=0^\circ$ のとき　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きに平行であり，$\cos\theta=1$

$\theta=180^\circ$ のとき　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反対向きに平行であり，$\cos\theta=-1$

であるから，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，次のことが成り立つ。

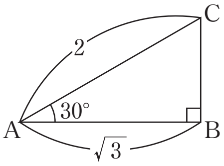
$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{または} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$$

1 右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$



Point Pickup

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

2 つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

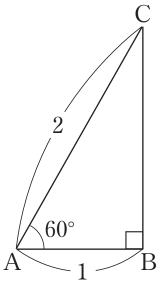
ベクトルの垂直と内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

第3講 PART1 確認問題

右の図において，次の内積を求めよ。



1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ア

2 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=$ イウ

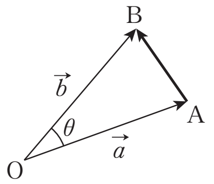
3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ エ

PART2 ベクトルの内積と成分

要点 ① 成分表示されたベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を成分で表す。

点Oを定め，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta$$

また，$0°<\theta<180°$ のとき，△OAB において余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta$$

この式は $\theta=0°$，$180°$ のときも成立し

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2}$$

と変形することができる。

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2}$ ……①

ここで

$\mathrm{OA}^2=|\vec{a}|^2=(\qquad\qquad)^2=a_1{}^2+a_2{}^2$，　$\mathrm{OB}^2=|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2$，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\qquad=(\qquad,\qquad)$ より　$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2&=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}\\&=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-(b_1{}^2-2b_1a_1+a_1{}^2+b_2{}^2-2b_2a_2+a_2{}^2)\\&=2a_1b_1+2a_2b_2\end{aligned}$$

よって，①より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

以上より，次のことが成り立つ。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

この式は，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

例 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 5)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\qquad\qquad\qquad=$

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(6,\ -4)$

Point Pickup

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

第3講 PART2 確認問題

次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ。

1 $\vec{a}=(1,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ アイ

2 $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ 0)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ウエ

PART3 ベクトルのなす角

要点① ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{\qquad}{\qquad}$$

である。

また, 2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$|\vec{a}|=$　　　　　, $|\vec{b}|=$　　　　　, $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\qquad}{\qquad}$$

である。

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

例 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$ のなす角 θ を求める。

$|\vec{a}|=$　　　　$=2\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=$　　　　$=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$　　　　$=10$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\qquad}{\quad\times\quad}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

であるから　$\theta=$

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$\vec{a}$　$\vec{b}$ $\iff$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$　 $\iff$ $a_1b_1+a_2b_2=$

が成り立つ。

[MEMO]

3 (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\ 3\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 5)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

Point Pickup

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

特に　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第3講　PART3 確認問題

1　2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ 5)$ のなす角 θ を求めよ。

$\theta=$ [アイ] °

2　2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -4)$, $\vec{b}=(x,\ 9)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

$x=$ [ウエ]

PART4 内積の性質

要点① 内積の性質

ベクトルの内積について，次の性質が成り立つ。

内積の性質 I

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

（**2** の証明）

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると

$$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$$

よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$

$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

同様に　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

1，**3** も同様にして証明できる。

3 が成り立つことにより，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ を単に $k\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く。

また，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ について，$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は　　であることにより

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}||\vec{a}|\times 1=|\vec{a}|^2$$

これは，$\vec{a}=\vec{0}$ のときも成り立つ。よって，次の性質が成り立つ。

内積の性質 II

4 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　**5** $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

例　$2\vec{a}\cdot(3\vec{a}-4\vec{b})=$　　　$-$　　　$=6$　　　$-8\vec{a}\cdot\vec{b}$

【MEMO】

4 (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

Point Pickup

内積の性質と演算

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし k は実数

4 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　**5** $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

これらの性質を用いて，内積の演算を，文字式の積と似た方式で行うことができる。

ベクトルの大きさと内積

$s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数)の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$$

のように，2 乗すると「内積」として演算を行うことができる。

第 3 講 PART4 確認問題

1 $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot(\boxed{ア}\vec{c}+\boxed{イ}\vec{d})+2\vec{b}\cdot(\boxed{ウ}\vec{c}+\boxed{エ}\vec{d})$

$=\boxed{オ}\vec{a}\cdot\vec{c}+\boxed{カ}\vec{a}\cdot\vec{d}+\boxed{キ}\vec{b}\cdot\vec{c}+\boxed{ク}\vec{b}\cdot\vec{d}$

2 $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot(\boxed{ケ}\vec{a}-\boxed{コ}\vec{b})+2\vec{b}\cdot(3\vec{a}-\boxed{サ}\vec{b})$

$=\boxed{シ}|\vec{a}|^2-\boxed{ス}|\vec{b}|^2$

3 $|3\vec{a}+4\vec{b}|^2$

$=(3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot\boxed{セ}\vec{a}+\boxed{ソ}\vec{a}\cdot4\vec{b}+4\vec{b}\cdot3\vec{a}+4\vec{b}\cdot\boxed{タ}\vec{b}$

$=\boxed{チ}|\vec{a}|^2+\boxed{ツテ}\vec{a}\cdot\vec{b}+\boxed{トナ}|\vec{b}|^2$

4 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき, $|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{ニヌ}}$

第 4 講 ベクトルと平面図形

PART1 位置ベクトル

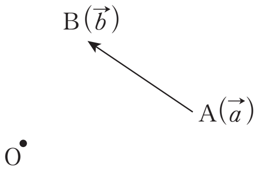
要点 ① 位置ベクトル

平面上の点の位置を，ベクトルで表す。

平面上で 1 点 O を固定すると，この平面上の点 P の位置はベクトル $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ で表すことができる。このとき，$\vec{p}$ を点 O に関する点 P の「　　　　　　」という。また，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点を「　　　」と表す。

例 2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$



※平面上の位置ベクトルにおける点 O は，その平面上のどこに定めてもよい。

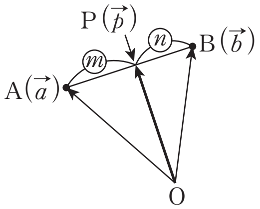
今後，特に断らない限り，点 O に関する位置ベクトルを考える。

要点 ② 分点の位置ベクトル

2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表す。

$AP:AB=m:(m+n)$　より　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ であるから

$=\dfrac{m}{m+n}(\qquad)$

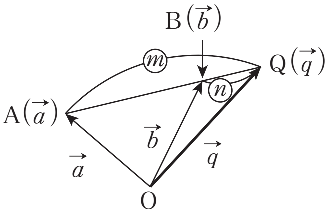


よって　$\vec{p}=\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\dfrac{(m+n)\vec{a}+m(\vec{b}-\vec{a})}{m+n}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

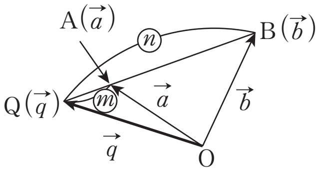
同様に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

となる。



$m>n$ のとき



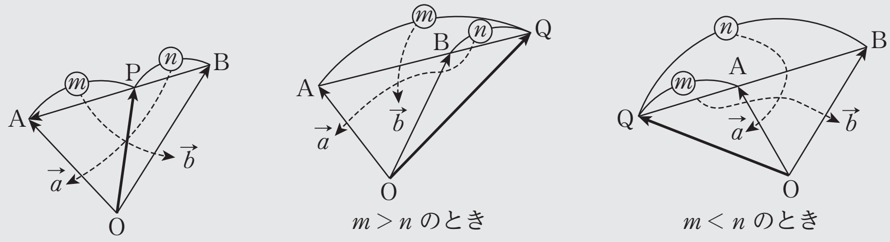
$m<n$ のとき

内分点・外分点の位置ベクトル

2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\quad \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$$



$m>n$ のとき　　$m<n$ のとき

特に，線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は　$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

例　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を

3：2 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{\quad\vec{a}+\quad\vec{b}}{\quad+\quad}=$

3：2 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は　$\vec{q}=\dfrac{\quad\vec{a}+\quad\vec{b}}{\quad-\quad}=$

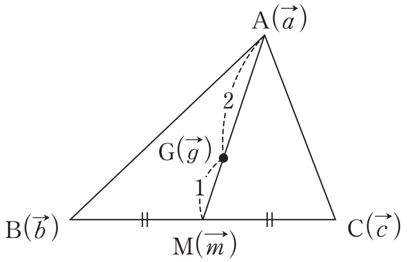
要点 ③ 三角形の重心の位置ベクトル

3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求める。

辺 BC の中点を $M(\vec{m})$ とすると　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

点 G は中線 AM を 2：1 に内分する点であるから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{m}}{2+1}=\frac{\vec{a}+2\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



三角形の重心の位置ベクトル

3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

1　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を，次の比に内分および外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　3：1 に内分する点の位置ベクトル $\vec{p}$，3：1 に外分する点の位置ベクトル $\vec{q}$

(2)　2：5 に内分する点の位置ベクトル $\vec{p}$，2：5 に外分する点の位置ベクトル $\vec{q}$

Point Pickup

内分点・外分点の位置ベクトル

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は　$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

第 4 講　PART1 確認問題

2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を，次の比に内分および外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

1　4：3 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$，4：3 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$

$$\vec{p}=\frac{\boxed{ア}\vec{a}+\boxed{イ}\vec{b}}{\boxed{ウ}}$$

$$\vec{q}=\boxed{エオ}\vec{a}+\boxed{カ}\vec{b}$$

2　2：7 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$，2：7 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$

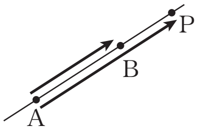
$$\vec{p}=\frac{\boxed{キ}\vec{a}+\boxed{ク}\vec{b}}{\boxed{ケ}}$$

$$\vec{q}=\frac{\boxed{コ}\vec{a}-\boxed{サ}\vec{b}}{\boxed{シ}}$$

PART2 一直線上の点

要点① 3点が一直線上にある条件

異なる3点A，B，Pが一直線上にあるとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は平行である。よって，ベクトルの平行条件から，次のことが成り立つ。



3点が一直線上にある条件

2点A，Bが異なるとき

3点A，B，Pが一直線上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

例 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$ のとき

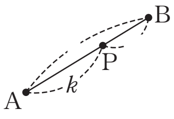
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}(\qquad\qquad)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって，3点A，B，Pは一直線上にある。

また，AP：PB＝　：

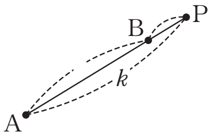
異なる3点A，B，Pが一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。$k\neq0$ かつ $k\neq1$ のとき，点Pは線分ABを次のような比に内分または外分する。

$0<k<1$ のとき



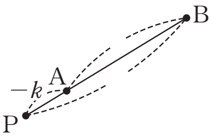
k：　　　に内分する

$k>1$ のとき



k：　　　に外分する

$k<0$ のとき

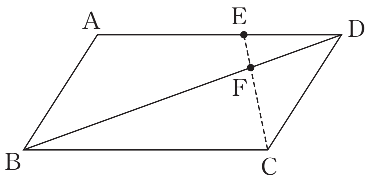


$(-k)$：　　　に外分する。

※$k=0$ のときは点Pは点Aと一致し，$k=1$ のときは点Pは点Bと一致する。

[MEMO]

2 平行四辺形 ABCD において，辺 AD を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 5：2 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 E，F，C は一直線上にあることを示せ。

Point Pickup

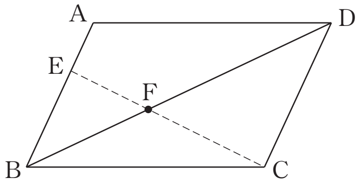
3 点が一直線上にある条件

2 点 A，B が異なるとき

3 点 A，B，P が一直線上にある $\iff$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

第4講　PART2 確認問題

平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを1：2に内分する点をE，対角線BDを2：3に内分する点をFとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ。



1

$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AC}=$ [ア]，$\overrightarrow{AE}=$ [イ]，$\overrightarrow{AF}=$ [ウ]

① $\dfrac{1}{3}\vec{b}$　② $\dfrac{2}{3}\vec{b}$　③ $\dfrac{1}{3}\vec{d}$　④ $\dfrac{2}{3}\vec{d}$

⑤ $\vec{b}+\vec{d}$　⑥ $\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$　⑦ $\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{d}$

⑧ $\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}$

2

3点E，F，Cが一直線上にあることを示す。

$\overrightarrow{EC}$ と $\overrightarrow{EF}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{EC}=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\vec{b}+\vec{d}$$

$$\overrightarrow{EF}=\frac{4}{\boxed{カキ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{d}$$

よって，$\overrightarrow{EF}=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\overrightarrow{EC}$ より，

3点E，F，Cは一直線上にある。

PART3　2直線の交点

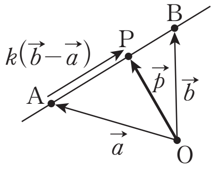
要点① 2直線の交点

異なる3点A，B，Pが一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。

このとき，3点A，B，Pの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$$\vec{p}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$$

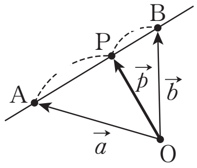
$$\vec{p}=\vec{a}+k(\vec{b}-\vec{a})=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}=\frac{(1-k)\vec{a}+k\vec{b}}{k+(1-k)}$$



よって，$0<k<1$ のとき，点Pは線分ABを　　：　　に内分する点であり，その位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

と表すことができる。

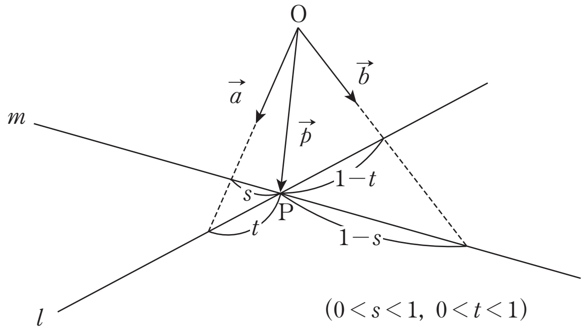


$0<k<1$ のとき

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が1次独立であるとき)，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s, t を用いて $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で，ただ1通りに表すことができる。よって，次のことが成り立つ。

$$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \iff m=m',\ n=n'$$

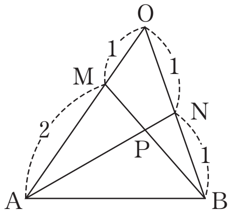
以上より，2直線の交点を表す位置ベクトルを，1次独立である2つのベクトルを用いて2通りに表し，その係数を比較することで求めることができる。



$(0<s<1,\ 0<t<1)$

[MEMO]

3 △OAB において，辺 OA を 1：2 に内分する点を M，辺 OB の中点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



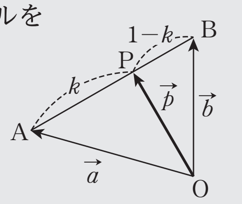
Point Pickup

線分を内分する点の位置ベクトル

線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\quad(0<k<1)$$

と表される。このとき，AP：PB＝k：$(1-k)$ である。



2 直線の交点の位置ベクトル

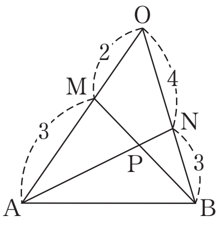
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立であるとき)，2 直線の交点を表す位置ベクトル $\vec{p}$ を，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

の形で 2 通りに表し，その係数を比較することで求める。

第 4 講　PART3 確認問題

1 △OAB において，辺 OA を 2：3 に内分する点を M，辺 OB を 4：3 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



AP：PN$=s$：$(1-s)$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{OP}=$ [ア] $\vec{a}+$ [イ] $\vec{b}$　……①

である。

また，BP：PM$=t$：$(1-t)$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{OP}=$ [ウ] $\vec{a}+$ [エ] $\vec{b}$　……②

である。

①，②より

$s=$ [オ]，$t=$ [カ]

したがって，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{b}$

である。

[ア , イ の選択肢]

① $\frac{3}{7}(1-s)$　② $\frac{4}{7}(1-s)$　③ $(1-s)$

④ $\frac{3}{7}s$　⑤ $\frac{4}{7}s$　⑥ s

[ウ , エ の選択肢]

① $\frac{2}{5}(1-t)$　② $\frac{3}{5}(1-t)$　③ $(1-t)$

④ $\frac{2}{5}t$　⑤ $\frac{3}{5}t$　⑥ t

[オ , カ の選択肢]

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{5}{9}$

④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{7}{9}$　⑥ $\frac{8}{9}$

[MEMO]

PART4 ベクトル方程式

要点① 直線と方向ベクトル

ここでは，位置ベクトルを用いて平面上の直線を表す。

点A($\vec{a}$) を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を l とする。

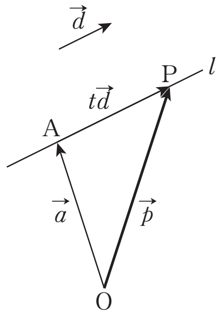
点P($\vec{p}$) が直線 l 上にあるとき

$$\overrightarrow{AP}=t\vec{d}$$

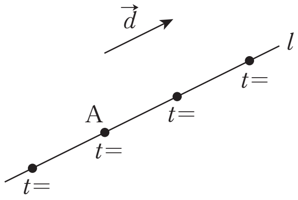
となる実数 t が存在する。$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$ より

$$\vec{p}-\vec{a}=t\vec{d}$$

すなわち　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ …… ①



①において，実数 t の値を 1 つ定めると，それに応じて直線 l 上の点 P の位置が定まる。逆に，直線 l 上の点 P の位置を定めると，実数 t の値が 1 つに定まる。したがって，t がすべての実数値をとって変化すると，点 P は直線 l 上のすべての点を動き，その軌跡は直線 l となる。



①を直線 l の「　　　　　　　　」といい，t を「媒介変数」という。また，$\vec{d}$ を直線 l の「　　　　　　」という。

直線のベクトル方程式

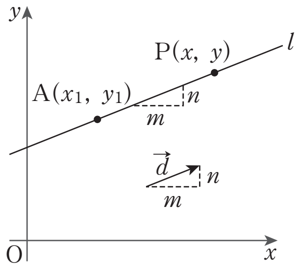
点A($\vec{a}$) を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

要点② 直線の媒介変数表示

直線のベクトル方程式 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ …… ①を，ベクトルの成分を用いて表す。

点 O を原点とする座標平面において，点 A$(x_1,\ y_1)$ を通り，$\vec{d}=(m,\ n)$ に平行な直線 l 上の点を P$(x,\ y)$ とする。



$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ より，①は

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(m,\ n)=(x_1+mt,\ y_1+nt)$$

であるから

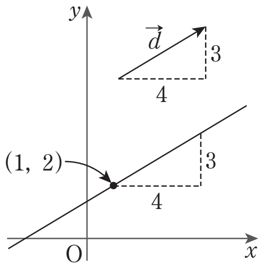
$$\begin{cases} x=x_1+mt \\ y=y_1+nt \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。この②を，直線 l の「　　　　　」(またはパラメータ表示)という。

例　点 $(1,\ 2)$ を通り，$\vec{d}=(4,\ 3)$ を方向ベクトルとする直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=(\ ,\ \ )+t(\ ,\ \ )=(1+4t,\ 2+3t)$$

よって $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \end{cases}$



要点③ 2点を通る直線のベクトル方程式

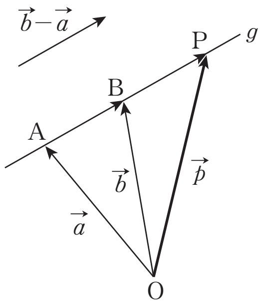
異なる2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線 l は，点Aを通り，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線であるから，直線 l のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\quad+t$$

すなわち　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ …… ③　と表される。

③において，$1-t=s$ とおくと，③は次のように表される。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1$$



2点を通る直線のベクトル方程式

異なる2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は

1　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　　**2**　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

例　2点 $A(2,\ 8)$，$B(7,\ 4)$ を通る直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y)=\qquad(2,\ 8)+\ (7,\ 4)=(2+5t,\ 8-4t)$$

よって $\begin{cases} x=2+5t \\ y=8-4t \end{cases}$

4 次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

(1) 点 A$(2,\ -3)$ を通り，$\vec{d}=(-1,\ 5)$ に平行な直線

(2) 2点 A$(-1,\ 6)$，B$(2,\ 1)$ を通る直線

Point Pickup

直線のベクトル方程式

点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

異なる2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

直線の媒介変数表示は，直線上の点 P の座標を $(x,\ y)$ とおき，ベクトルを成分表示して求める。

第4講 PART4 確認問題

次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

1 点 A$(-2,\ 5)$ を通り，$\vec{d}=(4,\ -7)$ に平行な直線

$$\begin{cases} x=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}t \\ y=5-\boxed{\text{エ}}t \end{cases}$$

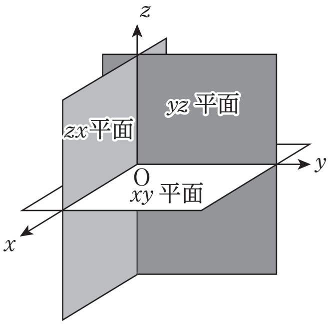
2 2点 A$(-2,\ 1)$，B$(2,\ -4)$ を通る直線

$$\begin{cases} x=-2+\boxed{\text{オ}}t \\ y=\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}t \end{cases}$$

第 5 講　空間のベクトル
PART1 空間の座標

要点 ① 座標空間

平面上の点と同じように，空間の点についても座標を考えることができる。



空間に点 O を定め，O を通り互いに直交する 3 本の数直線をひく。

これらの数直線をそれぞれ「　　」，「　　」，「　　」といい，まとめて「　　　」という。

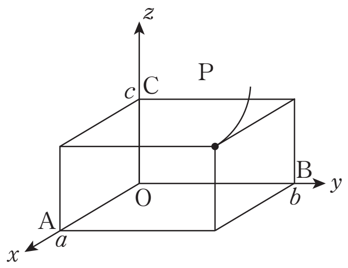
また

　x 軸と y 軸が定める平面を「　　　　」

　y 軸と z 軸が定める平面を「　　　　」

　z 軸と x 軸が定める平面を「　　　　」

といい，これらをまとめて「　　　　」という。



空間における任意の点 P に対して，P を通り yz 平面，zx 平面，xy 平面に平行な平面が，座標軸と交わる点をそれぞれ A，B，C とする。3 点 A，B，C の各座標軸上での座標が，それぞれ a，b，c であるとき，3 つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の「　　」といい，a，b，c をそれぞれ「　　　」，「　　　」，「　　　」という。

また，座標が $(a,\ b,\ c)$ である点 P を $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と表す。

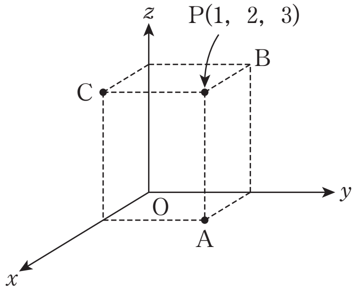
このように，座標の定められた空間を「　　　　」といい，点 O を「　　」という。原点 O の座標は $(0,\ 0,\ 0)$ である。

【MEMO】

1　点 P(1，2，3) から，xy 平面，yz 平面，zx 平面に垂線を下ろし，各平面との交点をそれぞれ A，B，C とする。

⑴　3点 A，B，C の座標を求めよ。

⑵　点 P と xy 平面に関して対称な点 Q の座標を求めよ。

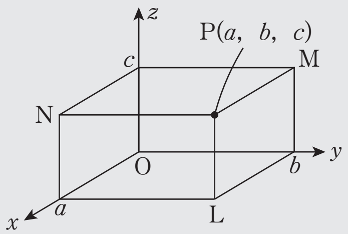


Point Pickup

空間の点の座標

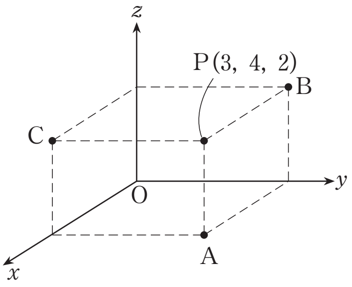
点 P を通り yz 平面，zx 平面，xy 平面に平行な平面が座標軸と交わる点の座標を，それぞれ a，b，c とするとき，3つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の座標といい，$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と表す。

$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ から xy 平面，yz 平面，zx 平面に下ろした垂線をそれぞれ PL，PM，PN とすると，$\mathrm{L}(a,\ b,\ 0)$，$\mathrm{M}(0,\ b,\ c)$，$\mathrm{N}(a,\ 0,\ c)$ である。



第 5 講　PART1 確認問題

点 P(3, 4, 2) から，xy 平面，yz 平面，zx 平面に垂線を下ろし，
各平面との交点をそれぞれ A，B，C とする。



1　3 点 A，B，C の座標を求めよ。

点 A の座標は　(ア , イ , ウ)

点 B の座標は　(エ , オ , カ)

点 C の座標は　(キ , ク , ケ)

2　点 P と xy 平面に関して対称な点 Q の座標を求めよ。

コ

① $(-3,\ 4,\ 2)$　　② $(3,\ -4,\ 2)$

③ $(3,\ 4,\ -2)$　　④ $(-3,\ -4,\ 2)$

⑤ $(-3,\ 4,\ -2)$　　⑥ $(3,\ -4,\ -2)$

PART2 空間のベクトル

要点 ① 空間のベクトル

平面におけるベクトルと同様に，空間において，その位置を問わず向きと大きさだけに着目したものを，空間の「ベクトル」という。空間内の有向線分 AB の表すベクトルを「 $\overrightarrow{AB}$ 」，その大きさを「 $|\overrightarrow{AB}|$ 」で表す。

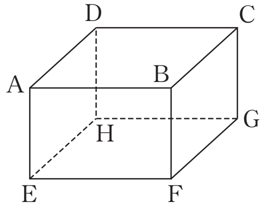
2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，この 2 つのベクトルは「等しい」といい，「$\vec{a}=\vec{b}$」と表す。

例 右図の直方体 ABCD−EFGH において

$\overrightarrow{AB}=$

$\overrightarrow{AD}=$

$\overrightarrow{AE}=$



空間のベクトルにおいても, 逆ベクトル, 零ベクトル, 単位ベクトルや, ベクトルの加法, 減法, 実数倍などは，平面の場合と同様に定義され，次のことが成り立つ。

交換法則 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　結合法則 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$　　$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$　　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

k，l を実数とするとき

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

また，空間のベクトルの平行についても，平面の場合と同様に，次のことが成り立つ。

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

空間の 4 点 O，A，B，C について，平面の場合と同様に，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$　　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

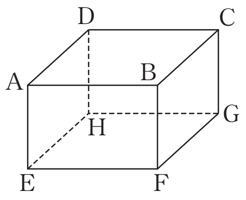
$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$　　$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は「1次独立」であるという。3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が1次独立であるとき

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \iff s=s',\ t=t',\ u=u'$$

が成り立つ。

2 右の図の直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおく，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

Point Pickup

ベクトルの分割

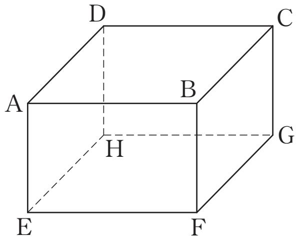
空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，2つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

のようにベクトルを分割し，指定されたベクトルを用いて表すことができる。

第 5 講　PART2 確認問題

次の図の直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



1　$\overrightarrow{AC}=$ ア

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

2　$\overrightarrow{BE}=$ イ

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

3　$\overrightarrow{BH}=$ ウ

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

4 $\overrightarrow{EC} =$ エ

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

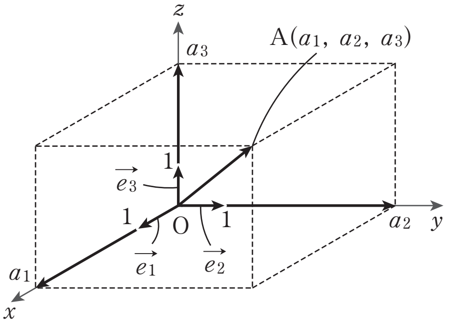
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

[MEMO]

PART3 ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

要点① 空間のベクトルにおける成分

Oを原点とする座標空間において，x軸，y軸，z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを「基本ベクトル」といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ で表す。



$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ の始点をOとすると，終点の座標はそれぞれ(1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)である。

座標空間のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ である点Aをとったとき，その座標が(a_1, a_2, a_3)であるならば，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=\quad\vec{e_1}+\quad\vec{e_2}+\quad\vec{e_3}$$

と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を用いてただ1通りに表される。この a_1，a_2，a_3 を，それぞれ $\vec{a}$ の「　　　」，「　　　」，「　　　」といい，

$$\vec{a}=$$

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の「　　　　」という。

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$，および零ベクトル $\vec{0}$ の成分表示は，次のようになる。

$$\vec{e_1}=(1, 0, 0),\ \vec{e_2}=(0, 1, 0),\ \vec{e_3}=(0, 0, 1),\ \vec{0}=(0, 0, 0)$$

成分表示された2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ について，次のことが成り立つ。

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2 \text{ かつ } a_3=b_3$$

また，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ とすると，$|\vec{a}|$ は線分OAの長さであることより，次のことがいえる。

成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

要点② 成分表示されたベクトルの演算

成分表示された2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の和，差，実数倍について，次のことが成り立つ。

成分表示されたベクトルの演算

$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

$(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

$k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ 　（k は実数）

例 $\vec{a}=(1,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -2)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 1,\ 2)+(2,\ 3,\ -2)=(\quad,\quad,\quad)=(\ ,\ ,\ )$

$4\vec{a}-2\vec{b}=4(1,\ 1,\ 2)-2(2,\ 3,\ -2)=(\ ,\ ,\ )-(\ ,\ ,\ )$

$=(\quad,\quad,\quad)=(\ ,\ ,\ )$

要点③ 座標と成分表示

座標空間の2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

であることより

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)-(a_1,\ a_2,\ a_3)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

よって，次のことが成り立つ。

座標と成分表示

2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

成分表示されたベクトルにおいて，x 成分は x 軸方向の移動量，y 成分は y 軸方向の移動量，z 成分は z 軸方向の移動量をそれぞれ表す。よって，成分表示されたベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の x 成分，y 成分，z 成分は，点Aから点Bへの移動において，x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向にそれぞれどれだけ移動するかを表している。

3 (1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ -2)$ のとき，$3\vec{a}-2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2) 2 点 A$(3,\ 4,\ -5)$，B$(1,\ 2,\ 3)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

Point Pickup

成分表示されたベクトルの大きさと演算

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

$$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$

点の座標と成分表示

2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

第5講 PART3 確認問題

1 $\vec{a}=(1,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$ のとき，$2\vec{a}+3\vec{b}$ の成分と大きさは

$$2\vec{a}+3\vec{b}=(\boxed{ア},\ \boxed{イウ},\ \boxed{エ})$$

$$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{\boxed{オカ}}$$

である。

2 2点 A$(3,\ 4,\ -3)$，B$(2,\ 3,\ 1)$ について，$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさは

$$\overrightarrow{AB}=(\boxed{キク},\ \boxed{ケコ},\ \boxed{サ})$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}$$

である。

PART4 ベクトルの内積となす角

要点 ① 空間のベクトルの内積

空間の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，なす角 θ を平面の場合と同様に定義し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ についても，平面の場合と同様に

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

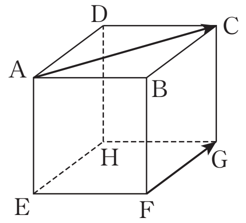
と定義する。

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定義する。

例 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH において

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{\qquad}$

$=\qquad\qquad=2\sqrt{2}\times2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4$



要点 ② 成分表示されたベクトルの内積

平面の場合と同様，余弦定理を用いることにより，次のことが成り立つ。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

例 $\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 5,\ 0)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\qquad\qquad=$

また，なす角について，次のことが成り立つ。

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

例　2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 4,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ -1)$ のなす角 θ を求める。

$|\vec{a}|=$　　　　　$=2\sqrt{6}$，$|\vec{b}|=$　　　　　$=\sqrt{6}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$　　　　　$=6$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\qquad}{\quad\times\quad}=\dfrac{1}{2}$

であるから　$\theta=$

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

が成り立つ。

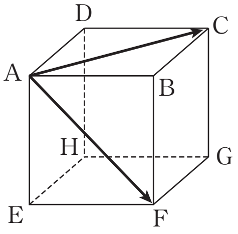
また，平面の場合と同様，次の性質が成り立つ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$ （ただし，k は実数）

4 (1) 1辺の長さが3の立方体ABCD-EFGHにおいて，内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ を求めよ。



(2) A(4, 3, 6)，B(2, 1, 2)，C(4, 1, 4) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。

(3) 2つのベクトル $\vec{a}=(k,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(5,\ 2,\ -4)$ が垂直であるとき, k の値を求めよ。

Point Pickup

ベクトルの内積となす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とし，なす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

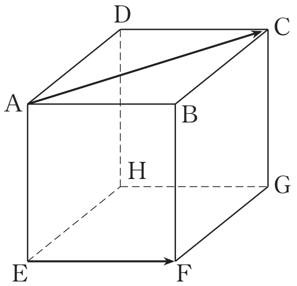
特に　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

第 5 講　PART4 確認問題

1　1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH において

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EF}}=$ ア

である。



2　A(1, 0, 2), B(2, 4, 1), C(0, 2, 0) を頂点とする △ABC において

$\angle\mathrm{BAC}=$ イウ °

である。

3　2 つのベクトル $\vec{a}=(k,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ 6,\ -8)$ が垂直であるとき

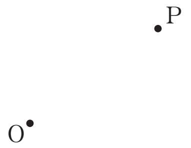
$k=$ エ

である。

第 6 講　空間図形とベクトル

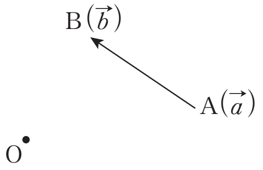
PART1 位置ベクトル

要点① 位置ベクトル



平面同様，空間においても，1点Oを固定すると，この空間内の点Pの位置はベクトル $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ で表すことができる。

このとき，$\vec{p}$ を点Oに関する点Pの「　　　　　　」といい，位置ベクトルが $\vec{p}$ である点Pを「　　　」と表す。



また，空間内の2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$$

と表される。

※空間内の位置ベクトルにおける点Oは，その空間内のどこに定めてもよい。
　今後，特に断らない限り，点Oに関する位置ベクトルを考える。

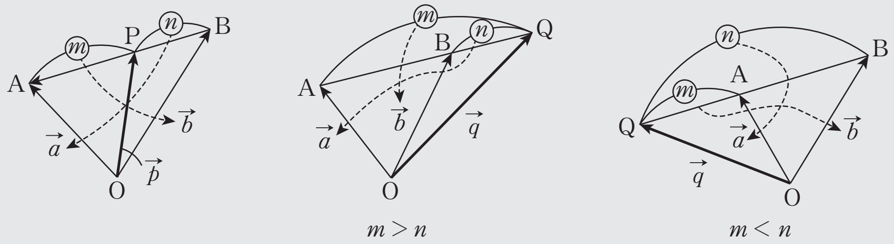
要点② 分点の位置ベクトル

平面同様，空間においても，次のことが成り立つ。

内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトルを $\vec{p}$，$m:n$ に外分する点Qの位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\quad \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$$



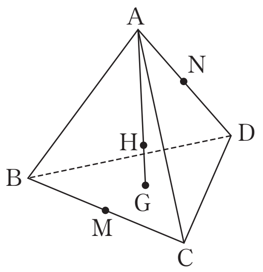
特に，線分ABの中点Mの位置ベクトル $\vec{m}$ は　$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

三角形の重心の位置ベクトル

3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

1 4 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M$(\vec{m})$，辺 AD の中点を N$(\vec{n})$ とする。



(1) 線分 MN の中点を P$(\vec{p})$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) △BCD の重心を G$(\vec{g})$ とし，線分 AG を 3：1 に内分する点を H$(\vec{h})$ とする。$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

Point Pickup

内分点・外分点・三角形の重心を表す位置ベクトル

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ に対して

線分 AB を $m：n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

線分 AB を $m：n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

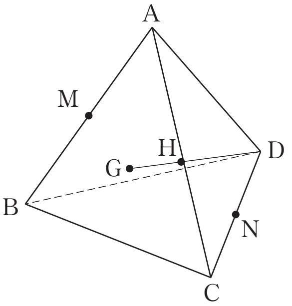
$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$$

△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第 6 講　PART1 確認問題

4点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$D(\vec{d})$ を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺ABの中点を $M(\vec{m})$，辺CDの中点を $N(\vec{n})$ とする。



1　線分MNの中点を $P(\vec{p})$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\vec{p}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{c}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{d}$$

2　△ABCの重心を $G(\vec{g})$ とし，線分DGを $3:2$ に内分する点を $H(\vec{h})$ とするとき，$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

$$\vec{h}=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\vec{c}+\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\vec{d}$$

PART2 一直線上の点

要点 ① 3 点が一直線上にある条件

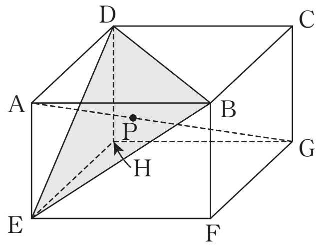
平面同様，空間においても，次のことが成り立つ。

3 点が一直線上にある条件

2 点 A，B が異なるとき

3 点 A，B，P が一直線上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

例 右図の直方体 ABCD-EFGH において，△BDE の重心 P は対角線 AG 上にあることを示す。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=$

また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

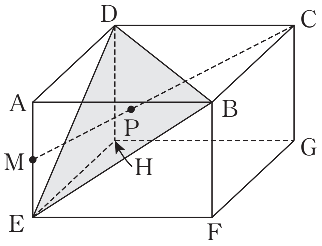
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\quad\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，点 P は対角線 AG 上にある。

[MEMO]

2 右の図の直方体 ABCD−EFGH において，辺 AE の中点を M，△BDE の重心を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 C，P，M は一直線上にあることを示せ。



Point Pickup

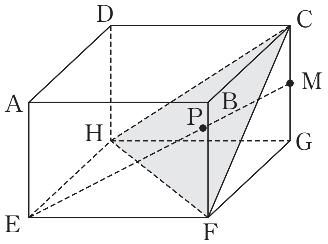
3 点が一直線上にある条件

2 点 A，B が異なるとき

3 点 A，B，P が一直線上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

第 6 講　PART2 確認問題

直方体ABCD-EFGHにおいて，辺CGの中点をM，△CFHの重心をPとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく。



1　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AM}=$ [ア]

また

$\overrightarrow{AC}=$ [イ]，$\overrightarrow{AF}=$ [ウ]，$\overrightarrow{AH}=$ [エ]

であるから

$\overrightarrow{AP}=$ [オ]

[[ア] の選択肢]

① $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{2}$　② $\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2}$

③ $\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$　④ $\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{2}$

⑤ $\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{2}$　⑥ $\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2}$

[[イ] ～ [オ] の選択肢]

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $\vec{b}+\vec{c}$

③ $\vec{a}+\vec{c}$　④ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}$

⑤ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　⑥ $\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

2 3 点 E，P，M は一直線上にあることを示す。

$\overrightarrow{EP}$，$\overrightarrow{EM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 用いて表すと

$\overrightarrow{EP}=$ カ $-$ キ より

$\overrightarrow{EP}=$ ク

$\overrightarrow{EM}=$ ケ $-$ コ より

$\overrightarrow{EM}=$ サ

したがって，$\overrightarrow{EP}=\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}\overrightarrow{EM}$ より，

3 点 E，P，M は一直線上にある。

[カ ， キ ， ケ ， コ の選択肢]

① $\overrightarrow{AB}$　② $\overrightarrow{AC}$　③ $\overrightarrow{AE}$

④ $\overrightarrow{AM}$　⑤ $\overrightarrow{AP}$　⑥ $\overrightarrow{AG}$

[ク ， サ の選択肢]

① $\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{2}$　② $\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{2}$

③ $\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{2}$　④ $\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{3}$

⑤ $\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}}{3}$　⑥ $\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

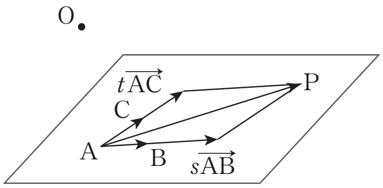
【MEMO】

PART3 同一平面上にある点

要点① 4点が同一平面上にある条件

一直線上にない3点A，B，Cを通る平面ABCは1つに定まる。

この平面上に点Pがある条件，すなわち4点A，B，C，Pが同一平面上にある条件は以下。



4点が同一平面上にある条件

一直線上にない3点A，B，Cが定める平面ABCについて

点Pが平面ABC上にある

$\iff$　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する

例　3点A$(-3,\ 1,\ 4)$，B$(0,\ 3,\ 2)$，C$(3,\ 3,\ 1)$ の定める平面ABC上に点P$(0,\ 1,\ z)$ があるとき，z の値を求める。

$$\overrightarrow{AB}=(3,\ 2,\ -2),\ \overrightarrow{AC}=(6,\ 2,\ -3)$$

より，3点A，B，Cは一直線上にない。よって，4点A，B，C，Pが同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AP}=(3,\ 0,\ z-4)$ に対して

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s，t が存在する。

$$(3,\ 0,\ z-4)=s(3,\ 2,\ -2)+t(6,\ 2,\ -3)$$

すなわち

$$(3,\ 0,\ z-4)=(3s+6t,\ 2s+2t,\ -2s-3t)$$

したがって
$$\begin{cases} 3=3s+6t & \cdots\cdots① \\ 0=2s+2t & \cdots\cdots② \\ z-4=-2s-3t & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①，②より　$s=-1$，$t=1$

③に代入して　$z=3$

[MEMO]

3 3点A(3, 2, 1), B(4, 3, 2), C(−2, −6, −1)の定める平面ABC上に点P(x, 5, 2)があるとき，xの値を求めよ。

Point Pickup

4点が同一平面上にある条件

一直線上にない3点A，B，Cが定める平面ABCについて

点Pが平面ABC上にある

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する

第 6 講　PART3 確認問題

1　3 点 $A(-1,\ 2,\ -2)$，$B(-3,\ 5,\ 1)$，$C(3,\ 3,\ 5)$ の定める平面 ABC 上に点 $P(x,\ 1,\ 0)$ があるとき，x の値を求めよ。

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を求めると

$$\overrightarrow{AB}=\left(-2,\ \boxed{ア},\ \boxed{イ}\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(\boxed{ウ},\ \boxed{エ},\ 7\right)$$

これより，3 点 A，B，C は一直線上にない。

よって，4 点 A，B，C，P が同一平面上にあるとき

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s，t が存在する。

s，t の値を求めると

$$s=\frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}},\ t=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

であるから，x の値を求めると

$$x=\boxed{コ}$$

PART4 座標空間における図形

要点① 2点間の距離，分点の座標

座標空間の2点 A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3) について，2点A，Bの間の距離は

AB＝

である。また，線分ABを $m:n$ に内分する点をP，$m:n$ に外分する点をQとすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ ＿＿＿＿＿＿，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=$ ＿＿＿＿＿＿

である。よって，次のことが成り立つ。

2点間の距離，内分点・外分点の座標

2点 A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3) について

A，B間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

$m:n$ に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n}, \dfrac{na_2+mb_2}{m+n}, \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は　$\left(\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n}, \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n}, \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$

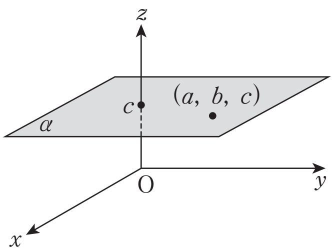
要点② 座標平面に平行な平面の方程式

点 $(0, 0, c)$ を通り，xy 平面に平行な平面 α 上の点の z 座標は常に c であり，x 座標，y 座標によらない。

逆に，z 座標が c である点は，平面 α 上にある。

この平面 α の方程式を　　　と表す。

一般に，次のことがいえる。



座標平面に平行な平面の方程式

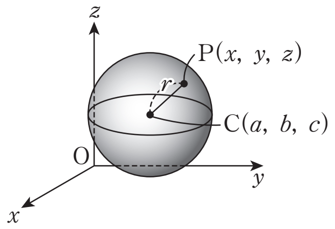
点 (a, b, c) を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=a$

点 (a, b, c) を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$y=b$

点 (a, b, c) を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=c$

要点 ③ 球面の方程式

空間において，定点Cからの距離が一定の値 r である点Pの集合を，中心がC，半径が r の「　　　」，または単に「　」という。



中心Cの座標を $(a,\ b,\ c)$，球面上の点Pの座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\mathrm{CP}=r \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{CP}^2=r^2$$

より

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

が成り立つ。これを「　　　　　　　」という。

球面の方程式

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

特に，中心が原点，半径が r の球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

例　中心が点 $(3,\ -2,\ 1)$，半径が4の球面の方程式は

$$(x-\quad)^2+\{y-\qquad\}^2+(z-\quad)^2=\quad{}^2$$

すなわち　$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=16$

4 (1) 2 点 A(1, 2, 3), B(−1, 3, 2) について，次のものを求めよ。

(i) 線分 AB を 2：3 に内分する点の座標

(ii) 線分 AB を 2：3 に外分する点の座標

(2) 点 (2, −3, −1) を通り，次の平面に平行な平面の方程式をそれぞれ求めよ。

(i) xy 平面　　(ii) yz 平面　　(iii) zx 平面

(3) 2 点 A(3, 1, 0), B(1, 3, −4) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

Point Pickup

2 点間の距離，分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

A，B 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

$m:n$ に内分する点の座標は　$\left(\dfrac{na_1+mb_1}{m+n},\ \dfrac{na_2+mb_2}{m+n},\ \dfrac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は　$\left(\dfrac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \dfrac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \dfrac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$

座標平面に平行な平面の方程式

点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=a$

点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$y=b$

点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=c$

球面の方程式

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

特に，中心が原点，半径が r の球面の方程式は　$x^2+y^2+z^2=r^2$

第6講 PART4 確認問題

2点 A(1, −3, 2), B(4, 3, −1) について，次の点の座標を求めよ。

1 線分 AB を 2：1 に内分する点

(［ア］, ［イ］, ［ウ］)

2 線分 AB を 2：1 に外分する点

(［エ］, ［オ］, ［カキ］)

点 (−2, 1, 3) を通り，次の平面に平行な平面の方程式をそれぞれ選べ。

3 xy 平面に平行な平面

［ク］

① $x=-2$　② $y=1$　③ $z=3$
④ $x=2$　⑤ $y=-1$　⑥ $z=-3$

4 yz 平面に平行な平面

［ケ］

① $x=-2$　② $y=1$　③ $z=3$
④ $x=2$　⑤ $y=-1$　⑥ $z=-3$

5 zx 平面に平行な平面

コ

① $x=-2$　② $y=1$　③ $z=3$
④ $x=2$　⑤ $y=-1$　⑥ $z=-3$

次の問いに答えよ。

6 2点A(8, 3, 2), B(2, 1, −4) を直径の両端とする球面の方程式は

$$(x-\boxed{サ})^2+(y-\boxed{シ})^2+(z+\boxed{ス})^2=\boxed{セソ}$$

である。

テキスト　解答

第 1 講　平面上のベクトル

PART1 有向線分とベクトル，ベクトルの相等

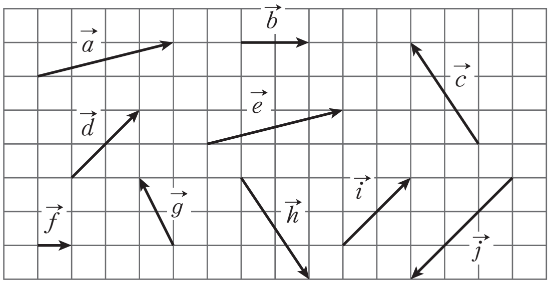
1 右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。

(1) 大きさが等しいベクトル

(2) 向きが同じであるベクトル

(3) 等しいベクトル

(4) 互いに逆ベクトル



[解答]

(1) $\vec{a}$ と $\vec{e}$，$\vec{c}$ と $\vec{h}$，$\vec{d}$ と $\vec{i}$

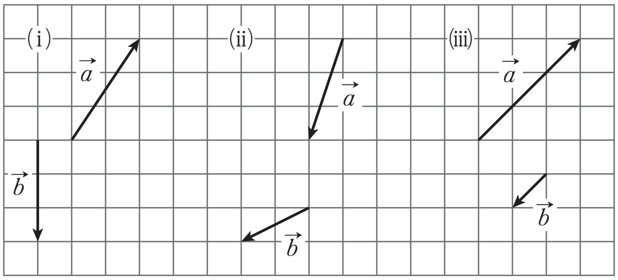
(2) $\vec{a}$ と $\vec{e}$，$\vec{b}$ と $\vec{f}$，$\vec{d}$ と $\vec{i}$

(3) $\vec{a}$ と $\vec{e}$，$\vec{d}$ と $\vec{i}$

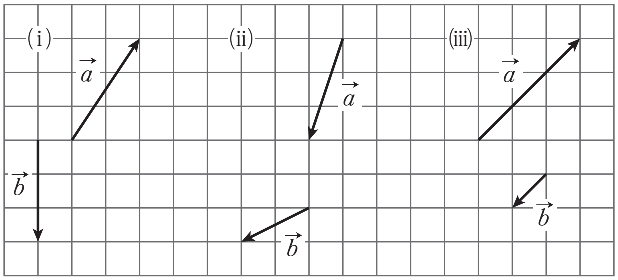
(4) $\vec{c}$ と $\vec{h}$

PART2 ベクトルの加法・減法

2 (1) 次の(i)～(iii)のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



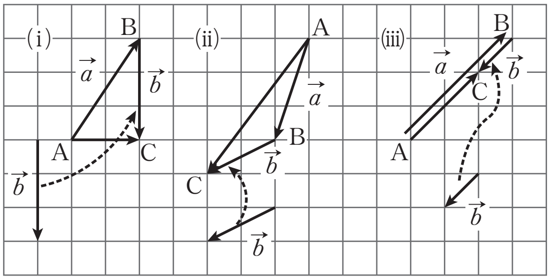
(2) 次の(i)～(iii)のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ をそれぞれ図示せよ。



[解答]

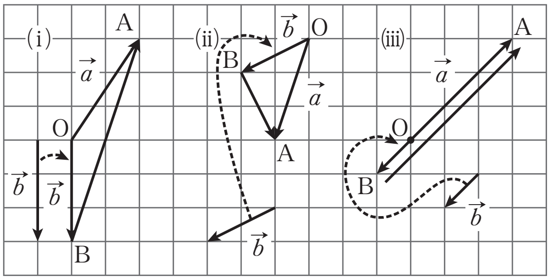
(1) (i)～(iii)のそれぞれについて，

図の $\overrightarrow{AC}$ が求める $\vec{a}+\vec{b}$



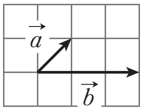
(2) (i)～(iii)のそれぞれについて，

図の $\overrightarrow{BA}$ が求める $\vec{a}-\vec{b}$

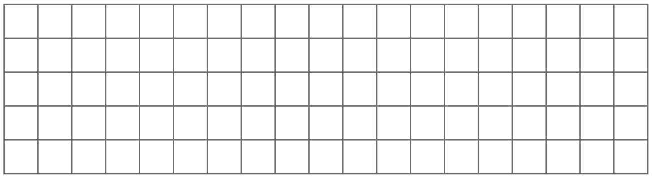


PART3 ベクトルの実数倍，ベクトルの演算

3 (1)　右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを図示せよ。



(i)　$2\vec{a}$　　(ii)　$-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　(iii)　$3\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$



(2)　次の計算をせよ。

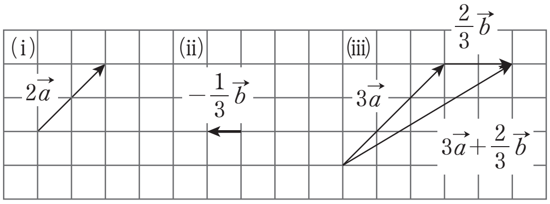
(i)　$4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}$　　(ii)　$\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}$　　(iii)　$3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})$

(3)　次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$2\vec{x}+4\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$$

[解答]

(1)



(2) (i)　$4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}=(4+3-5)\vec{a}=2\vec{a}$

(ii)　$\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}=(1-3)\vec{a}+(-2-1)\vec{b}=-2\vec{a}-3\vec{b}$

(iii)　$3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})=3\vec{a}-12\vec{b}-2\vec{a}+12\vec{b}=(3-2)\vec{a}+(-12+12)\vec{b}=\vec{a}$

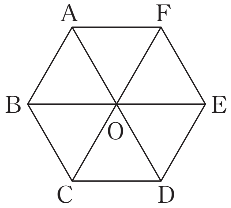
(3)　$2\vec{x}+4\vec{a}=\vec{b}-\vec{x}$　より　$2\vec{x}+\vec{x}=-4\vec{a}+\vec{b}$　　$3\vec{x}=-4\vec{a}+\vec{b}$

よって　$\vec{x}=-\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

PART4 ベクトルの平行，ベクトルの分解

4 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 FC の交点を O とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{FC}$　　(2) $\overrightarrow{AO}$　　(3) $\overrightarrow{DF}$



[解答]

(1) $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FO}=2\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=-\vec{b}+\left(-2\vec{a}\right)=-2\vec{a}-\vec{b}$

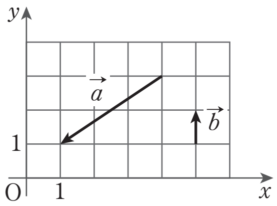
(別解)

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\vec{b}-2\overrightarrow{AO}=\vec{b}-2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-2\vec{a}-\vec{b}$

第 2 講　ベクトルの成分表示

PART1 ベクトルの成分

1 (1) 右の図のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。



(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(i) $\vec{a}-\vec{b}$　　　(ii) $2\vec{a}+3\vec{b}$

[解答]

(1) $\vec{a}=(-3,\ -2)$，$\vec{b}=(0,\ 1)$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$，$|\vec{b}|=1$

(2) (i) $\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -1)-(-3,\ 2)=(2+3,\ -1-2)=(5,\ -3)$

(ii) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(2,\ -1)+3(-3,\ 2)=(4,\ -2)+(-9,\ 6)=(-5,\ 4)$

PART2 ベクトルの成分と平行・分解

2 (1) 2 つのベクトル $\vec{a}=(x,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ -4)$ が平行になるように，x の値を定めよ。

(2) $\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-5,\ 6)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

[解答]

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから, $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ となるのは, $\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在するときである。

$(x,\ 2)=k(5,\ -4)$　より　$(x,\ 2)=(5k,\ -4k)$

よって，$x=5k$，$2=-4k$　より　$k=-\dfrac{1}{2}$，$x=-\dfrac{5}{2}$

(2) $s\vec{a}+t\vec{b}=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

であるから，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると

$$(-5,\ 6)=(-2s+t,\ 3s-2t)$$

よって，$-5=-2s+t$，$6=3s-2t$　より　$s=4$，$t=3$

したがって　$\vec{p}=4\vec{a}+3\vec{b}$

PART3 座標と成分表示

3 座標平面上の 3 点 A(1, 3), B(5, 2), C(7, 4) について，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形になるような点 D の座標を求めよ。

[解答]

(1) $\overrightarrow{AB}=(5-1,\ 2-3)=(4,\ -1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}=(7-5,\ 4-2)=(2,\ 2)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形になるための条件は

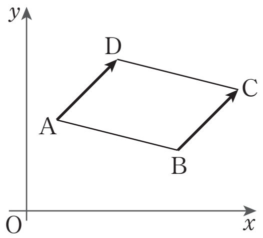
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

D$(x,\ y)$ とすると $\overrightarrow{AD}=(x-1,\ y-3)$

よって　$(x-1,\ y-3)=(2,\ 2)$　より　$x-1=2$，$y-3=2$

これを解いて　$x=3$，$y=5$

したがって，D の座標は (3, 5)



第 3 講　ベクトルの内積

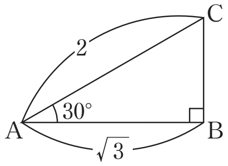
PART1 ベクトルの内積

1 右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$



[解答]

$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2}=1$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ=2\times 1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90^\circ=\sqrt{3}\times 1\times 0=0$

PART2 ベクトルの内積と成分

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(6,\ -4)$

[解答]

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times0+1\times4=0+4=4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times6+3\times(-4)=12-12=0$

PART3 ベクトルのなす角

3 (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\ 3\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 5)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

[解答]

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-\sqrt{3})\times3\sqrt{3}=2-9=-7$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-7}{\sqrt{7}\times2\sqrt{7}}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　　$\theta=120^\circ$

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 5)$ が垂直となるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$3\times x+6\times5=0$　より　$x=-10$

PART4 内積の性質

4 (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

[解答]

(1) (i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2-2\times4+2^2=5$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$

第 4 講　ベクトルと平面図形

PART1　位置ベクトル

1　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を，次の比に内分および外分する点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　3：1 に内分する点の位置ベクトル $\vec{p}$，3：1 に外分する点の位置ベクトル $\vec{q}$

(2)　2：5 に内分する点の位置ベクトル $\vec{p}$，2：5 に外分する点の位置ベクトル $\vec{q}$

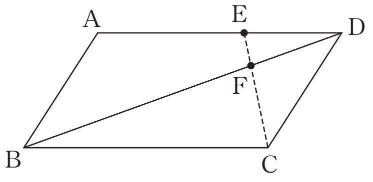
[解答]

(1)　$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$，$\vec{q}=\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1}=\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

(2)　$\vec{p}=\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5}=\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$，$\vec{q}=\dfrac{5\vec{a}-2\vec{b}}{-2+5}=\dfrac{5\vec{a}-2\vec{b}}{3}$

PART2 一直線上の点

2 平行四辺形 ABCD において，辺 AD を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 5：2 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として, 次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 E，F，C は一直線上にあることを示せ。

[解答]

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\vec{d}$

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}}{5+2}=\dfrac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5+2}=\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{5}{7}\vec{d}$

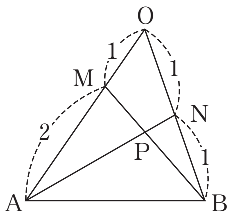
(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\vec{b}+\vec{d})-\dfrac{3}{5}\vec{d}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{5}{7}\vec{d}\right)-\dfrac{3}{5}\vec{d}=\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{4}{35}\vec{d}=\dfrac{2}{7}\left(\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}\right)$

よって，$\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{EC}$ より，3 点 E，F，C は一直線上にある。

PART3　2直線の交点

3　△OAB において，辺 OA を 1：2 に内分する点を M，辺 OB の中点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

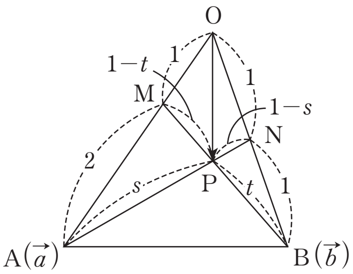


[解答]

AP：PN＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}$$

$$=(1-s)\vec{a}+s\times\frac{1}{2}\vec{b}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$



BP：PM＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$=t\times\frac{1}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{1}{3}t,\quad \frac{1}{2}s=1-t$$

これを解くと

$$s=\frac{4}{5},\quad t=\frac{3}{5}$$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

PART4 ベクトル方程式

4 次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

(1) 点 A$(2,\ -3)$ を通り，$\vec{d}=(-1,\ 5)$ に平行な直線

(2) 2 点 A$(-1,\ 6)$，B$(2,\ 1)$ を通る直線

[解答]

(1) $(x,\ y)=(2,\ -3)+t(-1,\ 5)=(2-t,\ -3+5t)$

よって $\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+5t \end{cases}$

(2) $(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 6)+t(2,\ 1)=(-1+t,\ 6-6t)+(2t,\ t)=(-1+3t,\ 6-5t)$

よって $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=6-5t \end{cases}$

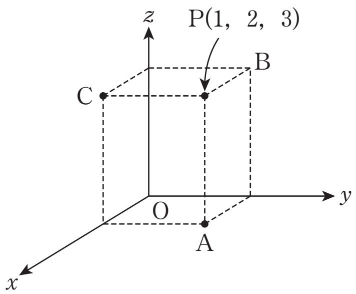
第 5 講　空間のベクトル

PART1　空間の座標

1　点 P(1, 2, 3) から，xy 平面，yz 平面，zx 平面に垂線を下ろし，各平面との交点をそれぞれ A，B，C とする。

(1)　3 点 A，B，C の座標を求めよ。

(2)　点 P と xy 平面に関して対称な点 Q の座標を求めよ。



[解答]

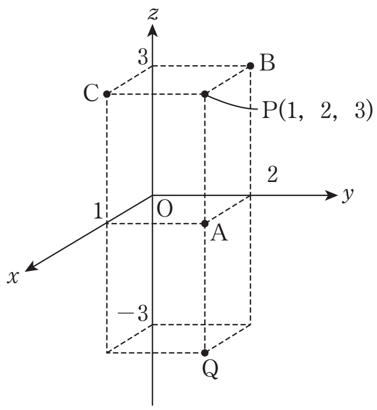
(1)　右の図より

点 A の座標は　(1，2，0)

点 B の座標は　(0，2，3)

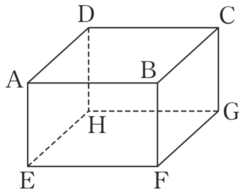
点 C の座標は　(1，0，3)

(2)　右の図より Q(1，2，−3)



PART2 空間のベクトル

2 右の図の直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{AF}$　(2) $\overrightarrow{AG}$

(3) $\overrightarrow{FC}$　(4) $\overrightarrow{CE}$

[解答]

(1) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\vec{b}-\vec{c}$

(別解)

$$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c})$$
$$=\vec{b}-\vec{c}$$

(4) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(別解)

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

PART3 ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

3 (1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ -2)$ のとき，$3\vec{a}-2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2) 2 点 A$(3,\ 4,\ -5)$，B$(1,\ 2,\ 3)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

[解答]

(1) $3\vec{a}-2\vec{b}=3(1,\ -1,\ 1)-2(2,\ 0,\ -2)$

$=(3,\ -3,\ 3)+(-4,\ 0,\ 4)=(-1,\ -3,\ 7)$

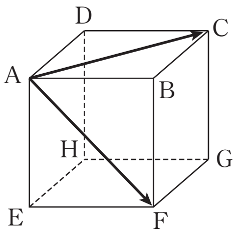
$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{59}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-3,\ 2-4,\ 3-(-5))=(-2,\ -2,\ 8)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+8^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

PART4 ベクトルの内積となす角

4 (1) 1辺の長さが3の立方体 ABCD-EFGH において，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を求めよ。



(2) A(4, 3, 6)，B(2, 1, 2)，C(4, 1, 4) を頂点とする △ABC において，∠ABC の大きさを求めよ。

(3) 2つのベクトル $\vec{a}=(k,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(5,\ 2,\ -4)$ が垂直であるとき，k の値を求めよ。

[解答]

(1) △ACF は1辺の長さが $3\sqrt{2}$ の正三角形であるから $\angle\mathrm{CAF}=60^\circ$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AF}}|\cos 60^\circ=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=9$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(4-2,\ 3-1,\ 6-2)=(2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4-2,\ 1-1,\ 4-2)=(2,\ 0,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\times2+2\times0+4\times2=12$

よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\dfrac{12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\angle\mathrm{ABC}\leqq180^\circ$ より　$\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$

(3) $\vec{a}\perp\vec{b}$　より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　$k\times5+(-1)\times2+2\times(-4)=0$　より　$5k-10=0$

したがって　$k=2$

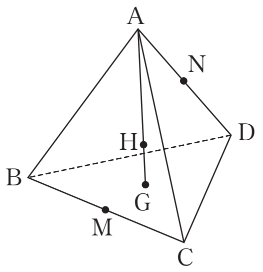
第 6 講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

1　4 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，辺 BC の中点を $\mathrm{M}(\vec{m})$，辺 AD の中点を $\mathrm{N}(\vec{n})$ とする。

(1)　線分 MN の中点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2)　△BCD の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とし，線分 AG を 3：1 に内分する点を $\mathrm{H}(\vec{h})$ とする。$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



[解答]

(1)　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\vec{n}=\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

よって　$\vec{p}=\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

(2)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

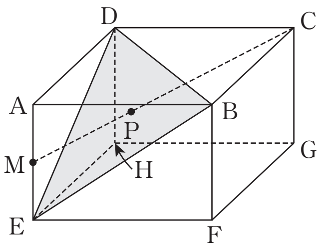
よって　$\vec{h}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{g}}{3+1}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}+3\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

PART2 一直線上の点

2 右の図の直方体 ABCD−EFGH において，辺 AE の中点を M，△BDE の重心を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 C，P，M は一直線上にあることを示せ。



[解答]

(1) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(2) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{6}$

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{2}$

よって，$\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MP}$ より，3 点 C，P，M は一直線上にある。

PART3 同一平面上にある点

3 3点A(3, 2, 1)，B(4, 3, 2)，C(−2, −6, −1)の定める平面ABC上に点P(x, 5, 2)があるとき，xの値を求めよ。

[解答]

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(-5,\ -8,\ -2)$

より，3点A，B，Cは一直線上にない。よって，4点A，B，C，Pが同一平面上にあるとき，

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ 3,\ 1)$に対して

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数s，tが存在する。

$$(x-3,\ 3,\ 1)=s(1,\ 1,\ 1)+t(-5,\ -8,\ -2)$$

すなわち

$$(x-3,\ 3,\ 1)=(s-5t,\ s-8t,\ s-2t)$$

したがって
$$\begin{cases} x-3=s-5t & \cdots\cdots① \\ 3=s-8t & \cdots\cdots② \\ 1=s-2t & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②，③より　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=-\dfrac{1}{3}$

①に代入して　$x=5$

PART4 座標空間における図形

4 (1) 2 点 A(1, 2, 3), B(−1, 3, 2) について，次のものを求めよ。

　(i) 線分 AB を 2：3 に内分する点の座標

　(ii) 線分 AB を 2：3 に外分する点の座標

(2) 点 (2, −3, −1) を通り，次の平面に平行な平面の方程式をそれぞれ求めよ。

　(i) xy 平面　　(ii) yz 平面　　(iii) zx 平面

(3) 2 点 A(3, 1, 0), B(1, 3, −4) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ。

[解答]

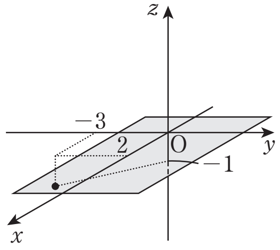
(1) (i) $\left(\dfrac{3\times1+2\times(-1)}{2+3},\ \dfrac{3\times2+2\times3}{2+3},\ \dfrac{3\times3+2\times2}{2+3}\right)$ より $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{12}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(ii) $\left(\dfrac{3\times1+(-2)\times(-1)}{-2+3},\ \dfrac{3\times2+(-2)\times3}{-2+3},\ \dfrac{3\times3+(-2)\times2}{-2+3}\right)$ より $(5,\ 0,\ 5)$

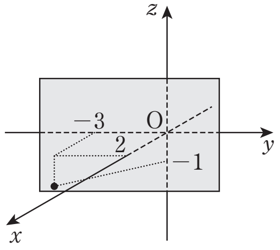
(2) (i) $z=-1$　　(ii) $x=2$　　(iii) $y=-3$

（参考図）

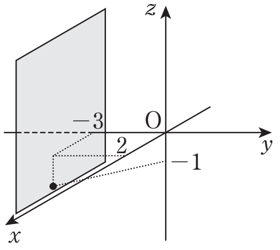
(i)



(ii)



(iii)



(3) 求める球面の中心を C とすると，直径 AB の中点であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{0-4}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \mathrm{C}(2,\ 2,\ -2)$$

球面の半径 r は

$$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2+\{0-(-2)\}^2}=\sqrt{6}$$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+\{z-(-2)\}^2=(\sqrt{6})^2$$

すなわち　$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$

確認問題　解答

第 1 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：④，イ：⑤，ウ：③

[解説]

大きさが等しいベクトルの組は [A]

$\vec{a}$ と $\vec{g}$，$\vec{b}$ と $\vec{h}$，$\vec{c}$ と $\vec{f}$

[A]　向きは関係なく，有向線分の長さが等しい組。

2

[正解] エ：⑤，オ：③，カ：②

[解説]

向きが同じであるベクトルの組は [B]

$\vec{b}$ と $\vec{h}$，$\vec{c}$ と $\vec{f}$，$\vec{d}$ と $\vec{e}$

[B]　長さは関係なく，有向線分の向きが同じである組。

3

[正解] キ：⑤，ク：③

[解説]

等しいベクトルとは，向きが同じで大きさが等しいベクトルであるから [C]

$\vec{b}$ と $\vec{h}$，$\vec{c}$ と $\vec{f}$

[C]　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について
向きが同じで大きさが等しい
$\iff \vec{a}=\vec{b}$（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は等しい）

4

[正解] ケ：④

[解説]

互いに逆ベクトルであるものは，大きさが等しく向きが反対であるものであるから [D]

$\vec{a}$ と $\vec{g}$ [E]

[D]　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について
向きが反対で大きさが等しい
$\iff \vec{a}=-\vec{b}$，$\vec{b}=-\vec{a}$
（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに逆ベクトル）

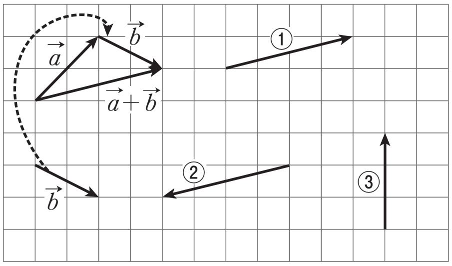
[E]　$\vec{g}=-\vec{a}$ と表される。

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1

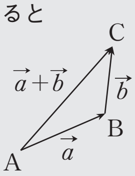
[正解] ア：①

[解説]



[A]

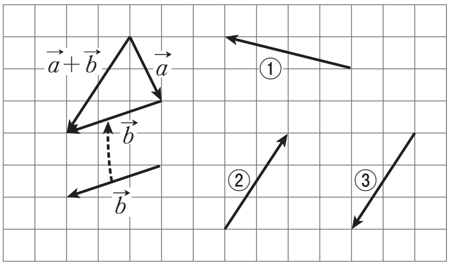
[A]　ベクトルの和
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$
一方のベクトルの終点と，他方のベクトルの始点を重ねる。



2

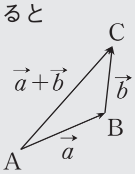
[正解] イ：③

[解説]



[B]

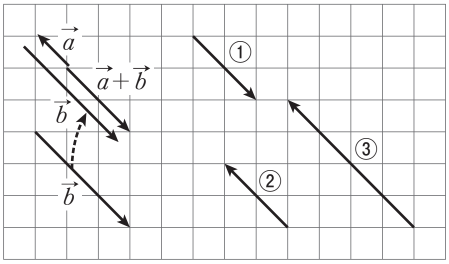
[B]　ベクトルの和
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$
一方のベクトルの終点と，他方のベクトルの始点を重ねる。



3

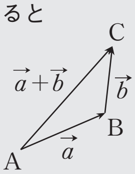
[正解] ウ：①

[解説]



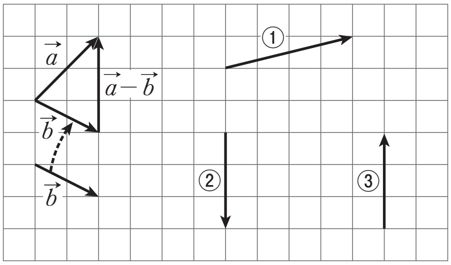
[C]

[C]　ベクトルの和
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$
一方のベクトルの終点と，他方のベクトルの始点を重ねる。



4 [正解] エ：③

[解説]

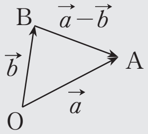


[D]

[D]　ベクトルの差

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

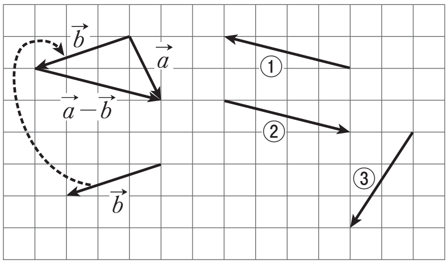
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$



2 つのベクトルの始点を重ねる。

5 [正解] オ：②

[解説]

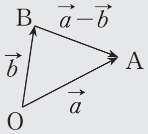


[E]

[E]　ベクトルの差

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

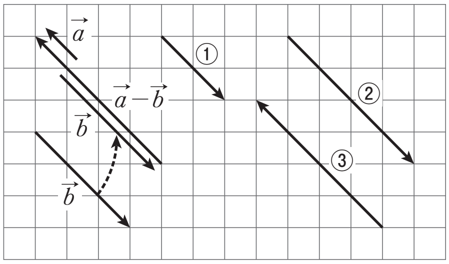
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$



2 つのベクトルの始点を重ねる。

6 [正解] カ：③

[解説]

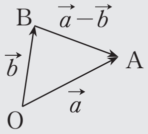


[F]

[F]　ベクトルの差

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$



2 つのベクトルの始点を重ねる。

第1講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$2\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが同じで, 大きさが2倍のベクトル。 [A]

[A]　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $k>0$ (k は実数)のとき, $k\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが同じで, 大きさが k 倍のベクトル。

2

[正解] イ：④

[解説]

$-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ は, $\vec{b}$ と向きが反対で, 大きさが $\dfrac{1}{2}$ 倍のベクトル。 [B]

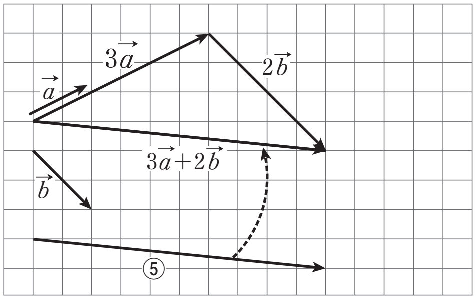
[B]　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $k<0$ (k は実数)のとき, $k\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが反対で, 大きさが $|k|$ 倍のベクトル。

3

[正解] ウ：⑤

[解説]

$3\vec{a}+2\vec{b}$ は, $3\vec{a}$ と $2\vec{b}$ を図示し, これらの和を求めればよい。 [C] [D]



[C]　$3\vec{a}$ の終点と, $2\vec{b}$ の始点を重ねる。

[D]　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $k>0$ (k は実数)のとき, $k\vec{a}$ は, $\vec{a}$ と向きが同じで, 大きさが k 倍のベクトル。

4

[正解] エ：4

[解説]

$$2\vec{a}+5\vec{a}-3\vec{a}=(2+5-3)\vec{a}$$ [E]

$$=4\vec{a}$$

[E]　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$ (k, l は実数)

5 **[正解]** オ：5，カ：3

[解説]

$$\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{a}-6\vec{b}=(1+4)\vec{a}+(3-6)\vec{b}$$ [F]

$$=\boldsymbol{5\vec{a}-3\vec{b}}$$

[F]　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$（$k$，$l$ は実数）

6 **[正解]** キ：3，ク：3

[解説]

$$4(\vec{a}+2\vec{b})-(\vec{a}+5\vec{b})=4\vec{a}+8\vec{b}-\vec{a}-5\vec{b}$$ [G]

$$=(4-1)\vec{a}+(8-5)\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{3\vec{a}+3\vec{b}}$$

[G]　$k(l\vec{a})=kl\vec{a}$

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

（k，l は実数）

7 **[正解]** ケ：3，コ：7，サ：2，シ：7

[解説]

$4\vec{x}-3\vec{a}=-3\vec{x}-2\vec{b}$ より

$$4\vec{x}+3\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$$ [H]

$$7\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{x}=\frac{3}{7}\vec{a}-\frac{2}{7}\vec{b}}$$

[H]　ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤

[解説]

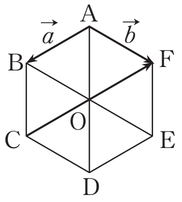
四角形 ABCO は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$

よって

$$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CO}$$ [A]

$$=\boldsymbol{-2\vec{a}}$$



[A]　ベクトルの平行
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\,/\!/\,\vec{p}\iff\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数kが存在する

2

[正解] イ：⑥

[解説]

四角形 ABOF は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AF}=\vec{b}$$

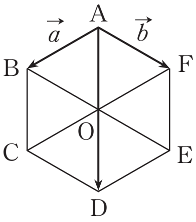
よって

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$$

$$=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}\right)$$ [B]

$$=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}$$



[B]　ベクトルの分解
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
の形で，ただ1通りに表すことができる。

3 [正解] ウ：③

[解説]

四角形 ABCO は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$

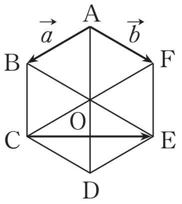
四角形 AOEF は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AF}=\vec{b}$$

よって

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}$$ [C]

$$=-\vec{a}+\vec{b}$$



(別解)

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}$$

$$=\vec{b}-\vec{a}$$

$$=-\vec{a}+\vec{b}$$

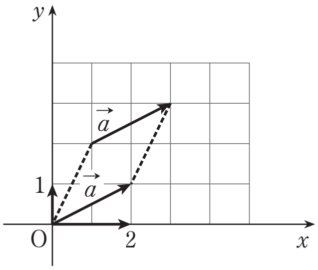
[C]　ベクトルの分解
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
の形で，ただ1通りに表すことができる。

第2講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：1，ウ：5，エオ：-2，カ：2，
キ：2，ク：2

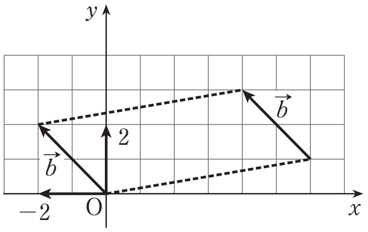
[解説]



$\vec{a}=(2,\ 1)$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ [A]

> [A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき
> $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$



$\vec{b}=(-2,\ 2)$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ [A]

2

[正解] ケ：3，コサ：-1

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 3)+(2,\ -4)$ [B]

$=(1+2,\ 3-4)$

$=(3,\ -1)$

> [B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
> $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

3 **[正解]** シ：1，スセ：13

[解説]

$3\vec{a}-\vec{b}=3(1,\ 3)-(2,\ -4)$ [C]

$=(3,\ 9)-(2,\ -4)$

$=(3-2,\ 9+4)$

$=\mathbf{(1,\ 13)}$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$　（k は実数）

第2講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：3

[解説]

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$であるから，$\vec{a}\parallel\vec{b}$となるのは，

$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在するときである。 [A]

$(x,\ 3)=k(2,\ -9)$ より

$$(x,\ 3)=(2k,\ -9k)$$

よって，$x=2k$，$3=-9k$ より

$$k=-\frac{1}{3},\quad \boldsymbol{x=-\frac{2}{3}}$$

> [A]　ベクトルの平行
> $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき
> $\vec{a}\parallel\vec{p}\iff\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

2

[正解] エ：3，オ：2

[解説]

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s(2,\ -1)+t(-1,\ 3)$$
$$=(2s-t,\ -s+3t)$$

であるから，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とすると [B]

$$(4,\ 3)=(2s-t,\ -s+3t)$$

よって，$4=2s-t$，$3=-s+3t$　より

$$s=3,\ t=2$$

したがって

$$\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}}$$

> [B]　ベクトルの分解
> $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて
> $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
> の形で，ただ1通りに表すことができる。

第2講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：1，ウエ：17，オ：2，カ：3，
キク：13

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(6-2,\ 2-1)$ [A]

$=(4,\ 1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}=(8-6,\ 5-2)$ [A]

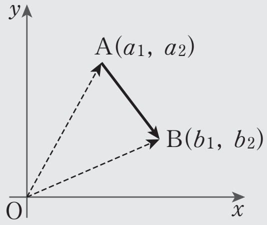
$=(2,\ 3)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

[A] 2点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ について

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$



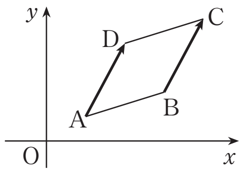
2

[正解] ケ：4，コ：4

[解説]

四角形ABCDが平行四辺形になるための条件は

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ [B]



D$(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{AD}=(x-2,\ y-1)$

$\overrightarrow{BC}=(2,\ 3)$ であるから

$(x-2,\ y-1)=(2,\ 3)$

$x-2=2$，$y-1=3$

これを解いて

$x=4$，$y=4$

したがって，点Dの座標は

$(4,\ 4)$

[B] 四角形ABCDが平行四辺形のとき，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

第3講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は，$\angle BAC=60°$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°$ [A]

$=1\times 2\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{1}$

[A]　$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

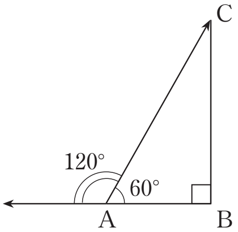
[正解] イウ：-1

[解説]

$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BA}$ のなす角は

$180°-60°=120°$

したがって



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$ [B]

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BA}|\cos 120°$

$=2\times 1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=\mathbf{-1}$

[B]　$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
2つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ である。

3

[正解] エ：0

[解説]

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{3}$

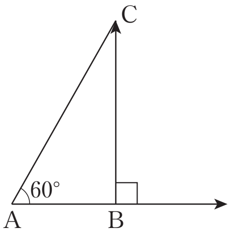
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は $90°$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ [C]

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90°$

$=1\times\sqrt{3}\times 0$

$=\mathbf{0}$ [D]



[C]　$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
2つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ である。

[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

第3講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：11

[解説]

$\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+4\times2$$ [A]

$$=3+8$$

$$=\mathbf{11}$$

[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

2

[正解] ウエ：12

[解説]

$\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ 0)$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4+(-2)\times0$$ [B]

$$=12+0$$

$$=\mathbf{12}$$

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：45

[解説]

$\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 5)$ より

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$

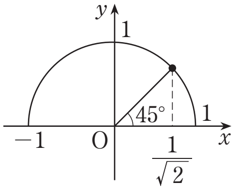
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times3+1\times5=12+5=17$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [A]

$$=\frac{17}{\sqrt{17}\times\sqrt{34}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$0°\leqq\theta\leqq180°$ より

$$\theta=45°$$

> [A]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると
>
> $$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

2

[正解] ウエ：12

[解説]

2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -4)$，$\vec{b}=(x,\ 9)$ が垂直となるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のときである。 [B]

よって

$$3\times x+(-4)\times9=0$$

より

$$x=12$$

> [B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について
>
> $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
>
> $\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第3講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：3，エ：2，オ：3，
カ：2，キ：6，ク：4

[解説]

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})+2\vec{b}\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})$ [A]

$=\vec{a}\cdot 3\vec{c}+\vec{a}\cdot 2\vec{d}+2\vec{b}\cdot 3\vec{c}+2\vec{b}\cdot 2\vec{d}$

$=3\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{d}+6\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{b}\cdot\vec{d}$

[A]
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
（ただし k は実数）

2

[正解] ケ：3，コ：2，サ：2，シ：9，ス：4

[解説]

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$ [B]

$=3\vec{a}\cdot 3\vec{a}-3\vec{a}\cdot 2\vec{b}+2\vec{b}\cdot 3\vec{a}-2\vec{b}\cdot 2\vec{b}$

$=9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$

[B]
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
（ただし k は実数）
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

3

[正解] セ：3，ソ：3，タ：4，チ：9，
ツテ：24，トナ：16

[解説]

$|3\vec{a}+4\vec{b}|^2=(3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})$ [C]

$=3\vec{a}\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})+4\vec{b}\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot 3\vec{a}+3\vec{a}\cdot 4\vec{b}+4\vec{b}\cdot 3\vec{a}+4\vec{b}\cdot 4\vec{b}$

$=9|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2$

[C]
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
（ただし k は実数）
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

4 **[正解]** ニヌ：23

[解説]

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$ [D]

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=2^2+2\times5+3^2$$

$$=23$$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ より

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{23}$$

[D]　$|s\vec{a}+t\vec{b}|$（s，t は実数）について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$$

2乗すると「内積」として演算を行うことができる。

第 4 講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：4，ウ：7，エオ：−3，カ：4

[解説]

線分 AB を 4:3 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

[A]

$$\vec{p}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{4+3}=\boldsymbol{\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}}$$

線分 AB を 4:3 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4-3}=\boldsymbol{-3\vec{a}+4\vec{b}}$$

[A] 2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

2

[正解] キ：7，ク：2，ケ：9，コ：7，サ：2，
シ：5

[解説]

線分 AB を 2:7 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

[B]

$$\vec{p}=\frac{7\vec{a}+2\vec{b}}{2+7}=\boldsymbol{\frac{7\vec{a}+2\vec{b}}{9}}$$

線分 AB を 2:7 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=\frac{-7\vec{a}+2\vec{b}}{2-7}=\boldsymbol{\frac{7\vec{a}-2\vec{b}}{5}}$$

[B] 2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

$m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

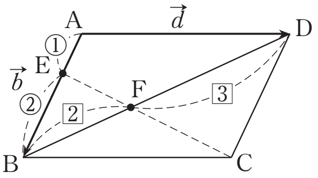
第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：①，ウ：⑧

[解説]

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$
$$=\vec{b}+\vec{d}$$



AE：EB＝1：2 より

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{1}{3}\vec{b}$$

BF：FD＝2：3 より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}}{2+3}$$ [A]
$$=\frac{3\vec{b}+2\vec{d}}{5}$$
$$=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$$

[A]　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m：n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

2 **[正解]** **エ**：2，**オ**：3，**カキ**：15，**ク**：2，**ケ**：5，
コ：2，**サ**：5

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}$$

これより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=(\vec{b}+\vec{d})-\frac{1}{3}\vec{b}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\left(\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}\right)-\frac{1}{3}\vec{b}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}}\\&=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{EC}}}$$ [B]

より，3 点 E，F，C は一直線上にある。

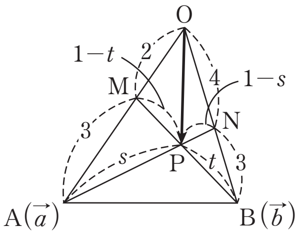
> [B]　2 点 A，B が異なるとき，
> 3 点 A，B，P が一直線上にある
> $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

第4講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：⑤，ウ：④，エ：③，オ：⑤，
カ：③，キ：2，ク：9，ケ：4，コ：9

[解説]



AP：PN $=s:(1-s)$ とおくと [A]

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}$$

$$=(1-s)\vec{a}+s\times\frac{4}{7}\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+\frac{4}{7}s\vec{b}} \quad \cdots\cdots ①$$

BP：PM $=t:(1-t)$ とおくと [A]

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$=t\times\frac{2}{5}\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{4}{7}s\vec{b}=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから [B]

$$1-s=\frac{2}{5}t,\ \ \frac{4}{7}s=1-t$$

これを解くと

$$\boldsymbol{s=\frac{7}{9},\ \ t=\frac{5}{9}}$$

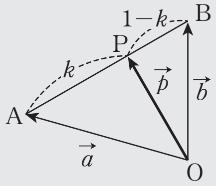
したがって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}$$

[A]　線分ABを内分する点Pについて，3点A，B，Pの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$　$(0<k<1)$

と表される。このとき，
AP：PB $=k:(1-k)$ である。



[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，2直線の交点を表す位置ベクトル $\vec{p}$ を，2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$

の形で2通りに表し，その係数を比較することで求める。

第4講 PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-2，ウ：4，エ：7

[解説]

点$A(-2,\ 5)$を通り，$\vec{d}=(4,\ -7)$に平行な直線の方程式は

$$(x,\ y)=(-2,\ 5)+t(4,\ -7) \quad \text{[A]}$$
$$=(-2+4t,\ 5-7t)$$

よって

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=5-7t \end{cases}$$

[A] 点$A(\vec{a})$を通り，$\vec{0}$でないベクトル$\vec{d}$に平行な直線のベクトル方程式は
$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

2 **[正解]** オ：4，カ：1，キ：5

[解説]

2点$A(-2,\ 1)$，$B(2,\ -4)$を通る直線の方程式は

$$(x,\ y)=(1-t)(-2,\ 1)+t(2,\ -4) \quad \text{[B]}$$
$$=(-2+2t,\ 1-t)+(2t,\ -4t)$$
$$=(-2+4t,\ 1-5t)$$

よって

$$\begin{cases} x=-2+4t \\ y=1-5t \end{cases}$$

[B] 異なる2点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$を通る直線のベクトル方程式は
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

第5講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：4，ウ：0，エ：0，オ：4，カ：2，
キ：3，ク：0，ケ：2

[解説]

点Aは xy 平面上の点であるから，z 座標は0になる。 [A]

よって，点Aの座標は

(3, 4, 0)

点Bは yz 平面上の点であるから，x 座標は0になる。

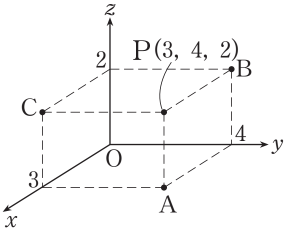
よって，点Bの座標は

(0, 4, 2)

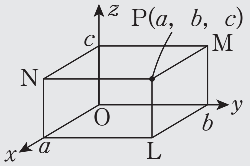
点Cは zx 平面上の点であるから，y 座標は0になる。

よって，点Cの座標は

(3, 0, 2)



> [A]　P(a, b, c) から xy 平面，yz 平面，zx 平面に下ろした垂線をそれぞれPL，PM，PNとすると，
> L(a, b, 0)，M(0, b, c)，N(a, 0, c)
> である。

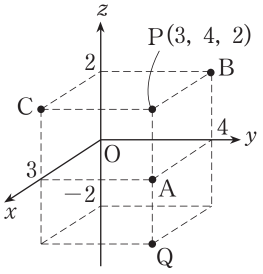


2

[正解] コ：③

[解説]

点Qは，次の図の位置にある。



図より，点Qの座標は

(3, 4, −2) [B]

> [B]　xy 平面に関して，
> 点P(a, b, c) と対称な点Qの座標は
> (a, b, $-c$)

第5講　PART2 確認問題 解答

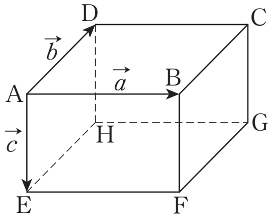
1

[正解] ア：①

[解説]

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ [A]

$=\vec{a}+\vec{b}$



[A]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

2

[正解] イ：②

[解説]

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ [B]

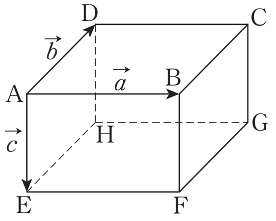
$=-\vec{a}+\vec{c}$

(別解)

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$ [B]

$=\vec{c}-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\vec{c}$



[B]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

3 [正解] ウ：⑥

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ [C]

$=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

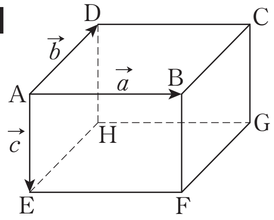
(別解)

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ [C]

$=(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}})-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



[C]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

4 [正解] エ：⑤

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ [D]

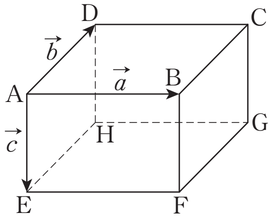
$=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

(別解)

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ [D]

$=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$



[D]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

第5講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：8，イウ：-3，エ：3，オカ：82

[解説]

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$ より

$$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ 0,\ 3)+3(2,\ -1,\ -1) \quad \text{[A]}$$
$$=(2,\ 0,\ 6)+(6,\ -3,\ -3)$$
$$=\mathbf{(8,\ -3,\ 3)}$$
$$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{82} \quad \text{[A]}$$

[A] $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，
$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき
$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$
$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2,\ a_3)$
$=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$ （k は実数）
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

2

[正解] キク：-1，ケコ：-1，サ：4，シ：3，
ス：2

[解説]

A$(3,\ 4,\ -3)$，B$(2,\ 3,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{AB}=(2-3,\ 3-4,\ 1-(-3)) \quad \text{[B]}$$
$$=\mathbf{(-1,\ -1,\ 4)}$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2} \quad \text{[B]}$$
$$=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

[B] 2点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，
B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$
$|\overrightarrow{AB}|$
$=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ であり，△ABC は AB＝BC＝2，

∠B＝90° の直角二等辺三角形であるから

$$AC=2\sqrt{2},\quad \angle BAC=45^\circ$$

よって

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos 45^\circ \quad \text{[A]}$$

$$=2\sqrt{2}\times2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

[A]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

2

[正解] イウ：45

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 4-0,\ 1-2)=(1,\ 4,\ -1)$ より

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{AC}=(0-1,\ 2-0,\ 0-2)=(-1,\ 2,\ -2)$ より

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3$$

また

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=1\times(-1)+4\times2+(-1)\times(-2) \quad \text{[B]}$$

$$=9$$

よって

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{9}{3\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

0°≦∠BAC≦180° より

$$\angle BAC=\mathbf{45^\circ}$$

[B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$$

3 **[正解]** エ：4

[解説]

$\vec{a} \perp \vec{b}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ [C]

よって

$$k \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times (-8) = 0$$ [C]

より

$$3k - 12 = 0$$

したがって

$$k = 4$$

[C]　$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ とするとき

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4，ウ：1，エ：4，オ：1，カ：4，キ：1，ク：4

[解説]

M，N はそれぞれ辺 AB，辺 CD の中点であるから

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} \quad \text{[A]}$$

よって，点 P は線分 MN の中点であるから

$$\vec{p}=\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

[A]　中点の位置ベクトル
2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

2

[正解] ケ：1，コ：5，サ：1，シ：5，ス：1，セ：5，ソ：2，タ：5

[解説]

点 G は △ABC の重心であるから

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad \text{[B]}$$

よって，点 H は線分 DG を 3：2 に内分する点であるから

$$\vec{h}=\frac{2\vec{d}+3\vec{g}}{3+2} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{5}\left(2\vec{d}+3\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{d}$$

[B]　三角形の重心の位置ベクトル
3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

[C]　内分点の位置ベクトル
2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑥，イ：①，ウ：③，エ：②，オ：⑥

[解説]

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ より

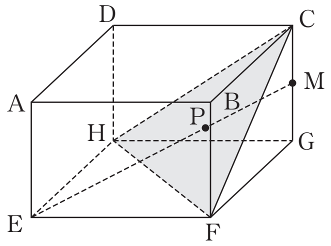
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2}}$$

また

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$$
$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{c}}$$
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}$$

であるから，点 P は △ABC の重心より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}}{3}$$ [A]
$$=\frac{(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{3}}$$



[A]　三角形の重心の位置ベクトル
3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

2 [正解] カ：⑤，キ：③，ク：④，ケ：④，コ：③，

サ：①，シ：2，ス：3

[解説]

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{3},\quad \overrightarrow{AM}=\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

であるから

$\overrightarrow{EP}$，$\overrightarrow{EM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{EP}=\boldsymbol{\overrightarrow{AP}}-\boldsymbol{\overrightarrow{AE}}$$

$$=\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{3}}$$

$$\overrightarrow{EM}=\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}-\boldsymbol{\overrightarrow{AE}}$$

$$=\frac{2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{2}}$$

よって

$$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$$

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$$

したがって，$\boldsymbol{\overrightarrow{EP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EM}}$ より

3点E，P，Mは一直線上にある。 [B]

> [B]　3点が一直線上にある条件
> 2点A，Bが異なるとき
> 3点A，B，Pが一直線上にある
> $\iff$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：3，ウ：4，エ：1，オカ：−1，
キ：2，ク：1，ケ：2，コ：2

[解説]

A(−1, 2, −2)，B(−3, 5, 1)，C(3, 3, 5) であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\mathbf{-2,\ 3,\ 3})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\mathbf{4,\ 1,\ 7})$$

これより，3 点 A，B，C は一直線上にない。

よって，4 点 A，B，C，P が同一平面上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+1,\ -1,\ 2)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 s，t が存在するから **[A]**

$$(x+1,\ -1,\ 2)=s(-2,\ 3,\ 3)+t(4,\ 1,\ 7)$$

すなわち

$$(x+1,\ -1,\ 2)=(-2s+4t,\ 3s+t,\ 3s+7t)$$

したがって

$$\begin{cases} x+1=-2s+4t & \cdots\cdots① \\ -1=3s+t & \cdots\cdots② \\ 2=3s+7t & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②，③より

$$\boldsymbol{s=-\frac{1}{2},\ t=\frac{1}{2}}$$

①に代入して

$$\boldsymbol{x=2}$$

[A]　4 点が同一平面上にある条件
一直線上にない 3 点 A，B，C が定める平面 ABC について
点 P が平面 ABC 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 s，t が存在する

第6講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：1，ウ：0

[解説]

線分 AB を 2：1 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\times1+2\times4}{2+1},\ \frac{1\times(-3)+2\times3}{2+1},\ \frac{1\times2+2\times(-1)}{2+1}\right) \quad \text{[A]}$$

より

$$(3,\ 1,\ 0)$$

[A]　2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

2

[正解] エ：7，オ：9，カキ：−4

[解説]

線分 AB を 2：1 に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-1\times1+2\times4}{2-1},\ \frac{-1\times(-3)+2\times3}{2-1},\ \frac{-1\times2+2\times(-1)}{2-1}\right) \quad \text{[B]}$$

より

$$(7,\ 9,\ -4)$$

[B]　2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

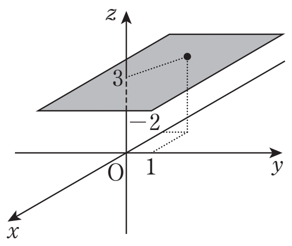
3

[正解] ク：③

[解説]

点 $(-2,\ 1,\ 3)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は

$$z=3 \quad \text{[C]}$$



[C]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は

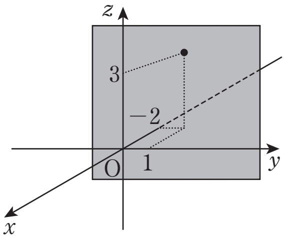
$$z=c$$

4 **[正解]** ケ：①

[解説]

点 $(-2,\ 1,\ 3)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は

$$\boldsymbol{x=-2}$$ [D]



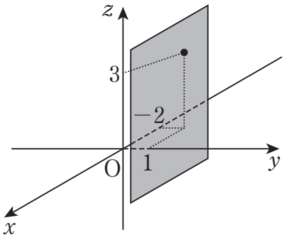
[D]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は
$x=a$

5 **[正解]** コ：②

[解説]

点 $(-2,\ 1,\ 3)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は

$$\boldsymbol{y=1}$$ [E]



[E]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は
$y=b$

6 **[正解]** サ：5，シ：2，ス：1，セソ：19

[解説]

求める球面の中心を C とすると，C は直径 AB の中点であるから A(8, 3, 2)，B(2, 1, −4) より

$$C\left(\frac{8+2}{2},\ \frac{3+1}{2},\ \frac{2-4}{2}\right)$$

すなわち

$$C(5,\ 2,\ -1)$$

球面の半径 r は

$$r=CA$$
$$=\sqrt{(8-5)^2+(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}$$
$$=\sqrt{19}$$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-5)^2+(y-2)^2+\{z-(-1)\}^2=(\sqrt{19})^2$$ [F]

すなわち

$$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=19}$$

[F]　球面の方程式
中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。